

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO  
SUCKOW DA FONSECA - CEFET/RJ**

**Modelagem Numérica para um Sistema de Geração  
de Energia através de Materiais Piezelétricos**

Juliana Medeiros Salgado  
Pedro Santana Bonotto Cabral

Prof. Orientador: Luciana Loureiro da Silva Monteiro  
Prof. Coorientador: Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco

**Rio de Janeiro  
Junho de 2018**

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO  
SUCKOW DA FONSECA - CEFET/RJ**

# **Modelagem Numérica para um Sistema de Geração de Energia através de Materiais Piezelétricos**

Juliana Medeiros Salgado  
Pedro Santana Bonotto Cabral

Projeto final apresentado em cumprimento às  
normas do Departamento de Educação Superior  
do CEFET/RJ, como parte dos requisitos para obtenção  
do título de Bacharel em Engenharia Mecânica

Prof. Orientador: Luciana Loureiro da Silva Monteiro  
Prof. Coorientador: Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco

**Rio de Janeiro  
Junho de 2018**

## CEFET/RJ – Sistema de Bibliotecas / Biblioteca Central

S164 Salgado, Juliana Medeiros  
Modelagem numérica para um sistema de geração de energia  
através de materiais piezelétricos / Juliana Medeiros Salgado,  
Pedro Santana Bonotto Cabral.—2018.  
xiv, 61f. + apêndice : il. (algumas color.) , grafs. , tab. ; enc.

Projeto Final (Graduação) Centro Federal de Educação  
Tecnológica Celso Suckow da Fonseca , 2018.

Bibliografia : f. 56-61

Orientadora : Luciana Loureiro da Silva Monteiro

Coorientador : Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco

1. Engenharia mecânica. 2. Piezo eletricidade e piro  
eletricidade. 3. Energia elétrica – Produção. 4. Sistemas lineares. I.  
Cabral, Pedro Santana Bonotto. II. Monteiro, Luciana Loureiro da  
Silva (Orient.). III. Pacheco, Pedro Manuel Calas Lopes (Coorient.).  
IV. Título.

CDD 621

Elaborada pela bibliotecária Livia Lima CRB-7/5904

## **DEDICATÓRIA**

Eu, Pedro Santana Bonotto Cabral, dedico este trabalho aos meus pais Marly Santana Bonotto Cabral e Saulo Bonotto Cabral, por todo amor, cuidado e ensinamentos de uma vida.

Dedico aos meus irmãos Estevão e Francisco pelo carinho, amizade e apoio.

Eu, Juliana Medeiros Salgado, dedico este trabalho aos meus pais Andréa Salgado e Vladimir Salgado, que me acompanharam em toda minha trajetória até aqui.

Dedico a minha irmã, Giovana Salgado, por todas as palhaçadas e carinhos que me ajudaram nos momentos difíceis.

Dedico também ao meu namorado Thiago Carbonell, sem ele não teria conseguido superar metade dos desafios que a mim foram impostos.

## AGRADECIMENTOS

### Agradecimentos Gerais

À Instituição CEFET/RJ por possibilitar o ensino de qualidade e por proporcionar toda a infraestrutura necessária para a realização desse trabalho.

À CAPES e CNPq por incentivarem a pesquisa ao tema discutido nesse texto.

A Professora D. Sc. Luciana Loureiro da Silva Monteiro e Professor D. Sc. Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco, orientadora e coorientador deste trabalho pelos seus conhecimentos, sua atenção e dedicação ao longo da elaboração da pesquisa. Agradecemos por terem aceitado fazer parte desse projeto e por nos apoiarem em momentos difíceis, mostrando disposição para nos orientar da melhor forma.

### Juliana Medeiros Salgado

Agradeço primeiramente os meus pais Andréa e Vladimir, e minha irmã Giovana, por todo amor, incentivo e suporte que me ajudaram a chegar até esse momento.

Agradeço ao meu namorado Thiago pelo carinho e pela paciência que sempre me acalmaram nos momentos mais difíceis. Pela companhia e ajuda que sempre me auxiliaram durante todo esse caminho percorrido.

Agradeço as minhas avós, aos meus familiares distantes e a todos os amigos que de alguma forma me ajudaram a vencer mais essa etapa.

Por fim, agradeço ao Pedro Bonotto que compartilhou comigo esse momento de crescimento pessoal e profissional.

### Pedro Santana Bonotto Cabral

Existem situações na vida em que é fundamental poder contar com o apoio e ajuda de algumas pessoas. Para a realização deste trabalho de conclusão de curso, pude contar com o apoio das quais prestarei através de poucas palavras o mais sincero agradecimentos:

A minha parceira de trabalho, Juliana Medeiros Salgado pelas trocas enriquecedoras, pelo comprometimento e por tornar possível a realização deste projeto.

A minha companheira e amiga, Adriana Andrade Alves por todo apoio e compreensão nas horas difíceis durante a elaboração da pesquisa.

“...que a importância de uma coisa não se mede com fita métrica nem com balança nem barômetros etc. Que a importância de uma coisa há que ser medida pelo encantamento que a coisa produza em nós.”

(Manoel de Barros, 2006)

## RESUMO

O conceito de Colheita de Energia (Energy Harvesting) é baseado na conversão da energia disponível em fontes externas como energia solar, vento, correntes marítimas e vibrações mecânicas de equipamentos e o seu armazenamento, em outras formas de energia como a energia mecânica de vibração em energia elétrica. Entre as formas utilizadas para a captação dessa fonte energética, o uso de materiais piezelétricos, classificados como materiais inteligentes por suas propriedades e capacidades adaptativas, tem se mostrado bastante interessante. Um dos principais focos desta área de estudo é a utilização da técnica de colheita de energia para suprir sistemas de difícil acesso e baixa potência. O que os torna autossuficientes, e também, gera o melhor aproveitamento da energia sem função no ambiente, provendo assim potenciais soluções no campo da energia limpa e renovável. Diversos modelos numéricos têm sido desenvolvidos a fim de verificar a performance de sistemas de colheita de energia com vigas piezelétricas. O presente projeto apresenta um modelo numérico de um oscilador massa-mola-amortecedor arquétipo com um grau de liberdade acoplado a um circuito elétrico através de um piezelétrico capaz de simular a geração de energia de materiais piezelétricos sujeitos à vibração. Diferentes simulações numéricas foram realizadas no intuito de estabelecer uma relação entre a energia gerada destacando a influência de adição de massa de prova, mudança no acoplamento eletromecânico ou variações de resistência. Os resultados numéricos foram comparados com resultados experimentais obtidos na literatura, mostrando que o modelo é bastante adequado para prever resultados experimentais, evidenciando ser um método interessante para aqueles que desejam se aprofundar e estudar a geração de energia em vigas piezelétricas sem a necessidade de realizar exaustivos ensaios experimentais que buscam otimizar o desempenho do sistema de colheita de energia.

Palavras-chave: Sistemas Lineares, Modelagem, Colheita de Energia, Geração de Energia, Materiais Piezelétricos.

## ABSTRACT

The concept of Energy Harvesting is based on the conversion of energy available in external sources as solar, wind, sea current and mechanical vibrations from equipment as well as its storage in others forms of energy like electrical energy. Among the forms explored to capture this energy source, the use of piezoelectric, classified as smart materials by its properties and adaptive capacity, have been shown quite interesting. One of the main focuses of this area of study is the use of the energy harvesting technique to supply systems with difficult access and low power. What makes them self-sufficient, and also, generates the best use of energy without function in the environment, thus providing potential solutions in the field of clean and renewable energy. Several numerical models have been developed to verify the performance of piezoelectric beams. The present project presents a numerical model mass-spring-damper oscillator archetype with one degree of freedom, coupled to an electric circuit through a piezoelectric capable of simulate the energy generation of piezoelectric materials subject to vibration. Different numerical simulations were performed in order to establish a relationship between the generated energy highlighting the influence when there is an addition of test mass, change in the electromechanical coupling or variations of resistance. The numerical results were compared with experimental results obtained in literature, showing that the model is quite adequate to predict experimental results, proving to be an interesting method for those who wish to deepen and study the energy generation in piezoelectric beams without the need to perform exhaustive experimental tests that seek to optimize the performance of the energy harvesting system.

**Keywords:** Linear Systems, Modeling, Energy Harvesting, Power Generation, Piezoelectric Materials.



## SUMÁRIO

|  |    |
|--|----|
| 1. Introdução .....  | 1  |
| 1.1. Objetivo .....  | 4  |
| 1.2. Organização do trabalho .....   | 5  |
| 2. Revisão Bibliográfica .....   | 6  |
| 2.1. Geração de Energia.....   | 7  |
| 2.2. Geração de Energia com uso de Materiais Piezelétricos .....                 | 8  |
| 2.3. Geração de Energia no Sistema Linear.....                                   | 11 |
| 2.4. Geração de Energia no Sistema Não-Linear.....                               | 12 |
| 2.5. Aplicações com uso de Materiais Piezelétricos para Geração de Energia ..... | 14 |
| 3. Fundamentação Teórica.....  | 16 |
| 3.1. Materiais Inteligentes .....  | 16 |
| 3.2. Materiais Piezelétricos.....  | 18 |
| 3.2.1. Efeitos da Piezeletricidade.....  | 21 |
| 3.2.2. Resposta de um sistema linear e não linear .....                          | 23 |
| 3.3. Teoria das vigas de Euler-Bernoulli .....                                   | 25 |
| 3.4. Método de Runge-Kutta de 4 <sup>o</sup> ordem.....                          | 26 |
| 4. Metodologia.....  | 27 |
| 4.1. Modelo para o Sistema Analisado .....                                       | 27 |
| 4.2. Metodologia Analítica .....   | 30 |
| 4.3. Metodologia Numérica .....  | 32 |
| 4.3.1. Análise de Convergência .....   | 32 |
| 4.3.2. Análise do número ideal de períodos .....                                 | 33 |
| 5. Resultados.....   | 35 |
| 5.1. Validação do Modelo Numérico desenvolvido .....                             | 35 |
| 5.2. Resultados Numéricos e Analíticos para um Sistema Piezelétrico Linear ..... | 41 |

|  |    |
|--|----|
| 5.3. Estudo da influência de adição de massas de prova para um Sistema Piezelétrico Linear.....  | 46 |
| 5.4. Estudo da influência da Resistência para um Sistema Piezelétrico Linear .....               | 48 |
| 5.5. Estudo da influência do acoplamento eletromecânico para um Sistema Piezelétrico Linear..... | 51 |
| 6. Conclusões.....   | 54 |
| 7. Referências Bibliográficas.....   | 56 |
| APÊNDICE A: Discretização das equações analíticas de movimento.....                              | 62 |

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1: Comparação de fontes de energia para sensor de nós wireless (adaptado de DU TOIT, 2005).....   | 7  |
| Figura 2: Configuração de vigas piezelétricas (adaptado de RAMADASS et al., 2010).....   | 9  |
| Figura 3: Tipos de geradores piezelétricos com geometria de viga, unimorfo (acima) e bimorfo (abaixo) (adaptado de DU TOIT, 2005). ....  | 9  |
| Figura 4: Esquema do coletor piezomagnetoelástico (adaptado de DE PAULA et al. , 2014). ....   | 14 |
| Figura 5: Tipos de relação que alguns dos materiais inteligentes podem apresentar (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017). ....   | 17 |
| Figura 6: Diagrama indicando a densidade de energia de atuação em função da deformação e tensão aplicada (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017). ....  | 17 |
| Figura 7: Diagrama comparando a faixa de frequência para atuação de cada material (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017). ....   | 18 |
| Figura 8: Estrutura atômica do quartzo. (a) Célula neutra; (b) Célula com carga em X; (c) Célula com carga em Y (Disponível em: <a href="http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/08/a-piezoelasticidade-no-cotidiano.html">http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/08/a-piezoelasticidade-no-cotidiano.html</a> )..... | 19 |
| Figura 9: Estrutura atômica do PZT: (a) configuração com a temperatura do material acima da temperatura de Curie; (b) configuração com a temperatura do material abaixo da temperatura de Curie (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017). ....   | 20 |
| Figura 10: Dipolos elétricos que conduzem o acoplamento eletromecânico em materiais piezelétricos (Imagem traduzida de LEO, 2007).....   | 20 |
| Figura 11: Representação visual do acoplamento entre os domínios físicos (Imagem traduzida de LEO, 2007). ....   | 21 |
| Figura 12: (a) Efeito Direto da Piezeletricidade; (b) Relação entre tensão e descarga elétrica em materiais piezelétricos (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017). ....   | 22 |
| Figura 13: Relação entre campo elétrico e a descarga elétrica em materiais piezelétricos (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017).....   | 22 |
| Figura 14: Relação entre campo elétrico e deformação em materiais piezelétricos (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017). ....   | 23 |
| Figura 15: Representação qualitativa da Resposta linear e não linear de um dispositivo com material piezelétrico (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017).....   | 24 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 16: Comportamento Linear e Não Linear Biestável e seus possíveis pontos de equilíbrio (BORGES e COSTA, 2017).....  | 25 |
| Figura 17: Viga de Euler – Bernolli (GIARETA, 2011). .....  | 25 |
| Figura 18: Representação esquemática do sistema considerado no trabalho (adaptado de KIM et al., 2010). .....   | 27 |
| Figura 19: Modelo Archetypal para um sistema de vibração de base de Energy Harvesting (TRIPLETT e QUINN, 2009). .....   | 28 |
| Figura 20: Análise de convergência. ....  | 33 |
| Figura 21: Comparação entre os deslocamentos gerados pelo método numérico em um mesmo intervalo de tempo (220 Hz; 20 K $\Omega$ ; Nper = 50; Npoint = 500). ..... | 34 |
| Figura 22: Comparação entre os deslocamentos gerados pelos modelos analítico e numérico variando o número de períodos. ....                                       | 34 |
| Figura 23: Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) gerada pelo sistema sem massa de prova, para uma frequência de 75 Hz. ....                                       | 36 |
| Figura 24: Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema sem massa de prova, para uma frequência de 135 Hz. ....                       | 36 |
| Figura 25: Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema sem massa de prova, para uma frequência de 109.5 Hz. ....                     | 37 |
| Figura 26: Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova I, para uma frequência de 20 Hz. ....                    | 37 |
| Figura 27: Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova I, para uma frequência de 55 Hz. ....                    | 38 |
| Figura 28: Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova I, para uma frequência de 41.625 Hz. ....                | 38 |
| Figura 29: Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova II, para uma frequência de 25 Hz. ....                   | 39 |
| Figura 30: Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova II, para uma frequência de 50 Hz. ....                   | 39 |
| Figura 31: Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova II, para uma frequência de 34.75 Hz. ....                | 39 |
| Figura 32: Potência gerada pelo sistema (a) Sem massa de prova; (b) Com a massa de prova 1; (c) Com a massa de prova 2.....                                       | 40 |
| Figura 33: Deslocamento gerado pelo sistema sem massa de prova. ....  | 41 |
| Figura 34: Tensão Elétrica gerada pelo sistema sem massa de prova. ....   | 42 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 35: Potência gerada pelo sistema sem massa de prova. ....   | 42 |
| Figura 36: Deslocamento gerado pelo sistema com a massa de prova I. ....   | 43 |
| Figura 37: Tensão Elétrica gerada pelo sistema com a massa de prova I. ....  | 43 |
| Figura 38: Potência gerada pelo sistema com a massa de prova I.....  | 44 |
| Figura 39: Deslocamento gerado pelo sistema com a massa de prova II. ....  | 44 |
| Figura 40: Tensão Elétrica gerada pelo sistema com a massa de prova II.....  | 45 |
| Figura 41: Potência gerada pelo sistema com a massa de prova II. ....  | 45 |
| Figura 42: Potência x frequência para os sistemas com e sem massas de prova.....   | 46 |
| Figura 43: Deslocamento x Frequência para os sistemas com massas de prova I e II. ....   | 47 |
| Figura 44: Potência x Resistência para os sistemas com e sem massa de prova. ....  | 48 |
| Figura 45: Tensão Elétrica x frequência para o sistema sem massa de prova. ....  | 49 |
| Figura 46: Potência x frequência para o sistema sem massa de prova. ....   | 49 |
| Figura 47: Tensão Elétrica x frequência para o sistema com a massa de prova I. ....  | 50 |
| Figura 48: Potência x frequência para o sistema com a massa de prova I. ....   | 51 |
| Figura 49: Tensão Elétrica x frequência para diferentes valores de acoplamento eletromecânico para o sistema sem massa de prova. ....                          | 52 |
| Figura 50: Potência x frequência para diferentes valores de acoplamento eletromecânico para o sistema sem massa de prova. ....                                 | 52 |
| Figura 51: Potência x acoplamento para o sistema sem massa de prova. (a) frequências antes da ressonância (109.5 Hz); (b) frequências após a ressonância. .... | 53 |

## LISTA DE TABELAS

|  |    |
|--|----|
| Tabela 1: Comparação coleta de energia para técnicas linear e não-linear em um circuito Buck Boost modificado (adaptado de DARMA YUDA et al., 2013)..... | 10 |
| Tabela 2: Parâmetros utilizados para os três casos estudados (KIM et al., 2010).....   | 32 |

# Capítulo 1

## 1. Introdução

A energia é o combustível que move o mundo, independente de sua origem. Especificamente falando, em sociedade, a energia sempre caminhou junto com o avanço tecnológico, e por muitas décadas os combustíveis fósseis ficaram em posição de destaque frente às outras fontes de energia, sendo motivo de grandes embates e disputas.

A partir da preocupação com a diminuição dos impactos ambientais, e também das mudanças climáticas que a utilização desenfreada dessa fonte energética vem gerando, as pesquisas tecnológicas foram tomando um novo rumo, buscando novos horizontes. O foco nos tipos de energias que pudessem se renovar constantemente no ambiente, como tecnologias de captação principalmente do vento, do sol, da biomassa e das marés começaram a se expandir para tornarem sinônimo de futuro. Exemplos de países como Alemanha, Estados Unidos, Espanha e China tem cada vez mais obtido êxito na substituição de suas matrizes energéticas, avançando com a pesquisa e desenvolvimento nesse campo e criando uma tendência mundial para as próximas décadas.

No momento atual, paralelo à construção e expansão de grandes parques de energia limpa para suprir o consumo humano de energia elétrica, outro tipo de aplicação das fontes renováveis vem ganhando espaço nas pesquisas, sendo este o objetivo deste estudo.

Para deixar sistemas e dispositivos eletrônicos mais autônomos tanto em micro ou nano escala de geração, a aplicabilidade dos chamados materiais inteligentes e o conceito de colheita de energia, tem ganhado visibilidade. Silva et al. (2013) apontam que os materiais inteligentes possuem um acoplamento entre grandezas mecânicas e não mecânicas, que confere ao material um tipo especial de comportamento. Neste sentido, é possível imaginar inúmeras aplicações devido ao acoplamento de campos que, geralmente, não estão relacionados. (SILVA et al., 2013).

Esses tipos de materiais podem reagir a um estímulo exterior, tendo um comportamento adaptativo, de modo que suas propriedades podem ser alteradas e estes serem reparados quando necessário (SILVA et al., 2013). Alguns exemplos destes tipos de materiais são as ligas com memórias de forma (SMAs), os materiais magnetostrictivos e os materiais piezelétricos.

As ligas com memórias de forma (SMAs) tem a capacidade de recuperar uma forma previamente estabelecida a partir de um carregamento termomecânico. Os materiais magnetostrictivos apresentam uma distorção na sua estrutura molecular quando submetidos a um campo magnético, alterando a sua forma. Os materiais piezelétricos, objetivo de nosso estudo, apresentam o fenômeno da piezeletricidade, que é baseado na capacidade de geração de dipolos elétricos no material. Esses materiais apresentam uma aplicação em dois caminhos inversos. Ao aplicar um campo elétrico, uma deformação mecânica ocorre e o efeito inverso acontece ao deformar mecanicamente o material, gerando um campo elétrico (SILVA et al., 2013).

O presente trabalho tem como alvo a captação de energia a partir da vibração mecânica, por ser uma fonte abundante e de fácil acesso para sistemas microeletromecânicos (ROUNDY et al., 2004b, SODANO et al., 2005).

A colheita de energia, ou Energy Harvesting é a conversão da energia ambiente presente no meio em energia elétrica, podendo-se explorar fontes solares, gradientes térmicos, acústicas e a própria vibração mecânica (SHU, Y.C., 2009).

A energia de vibração mecânica pode ser convertida em energia elétrica tanto através de piezelétricos, transdutores eletromagnéticos, quanto de capacitores eletromagnéticos (BEEBY et al., 2007). A tecnologia piezelétrica vem sendo estudada amplamente para o desenvolvimento de transdutores, sensores e dispositivos para captação de energia (RANGEL, 2014).

De acordo com Kazmierski e Beeby (2011), a colheita de energia tem sido impulsionada pela proliferação de sistemas autônomos e eletrônicos wireless. Os autores citam um clássico exemplo de nós de sensores wireless, que quando combinados podem formar uma rede. Dessa maneira, esta rede de sensores wireless apresenta uma gama de aplicações, tais como controle de temperatura de edifícios, estocagem de armazéns, controle de cadeia de suprimentos, casas inteligentes (RABAEY et al., apud DU TOIT, 2005), monitoramento de saúde estrutural (aeroespacial e automotivo), automação agrícola, aplicações de segurança interna (LIU et al., apud DU TOIT, 2005) e muitas outras que necessitam monitorar algum fenômeno.

Esses aparelhos podem utilizar baterias para se autosustentar, já que o seu sistema é wireless e, portanto deve ser alimentado localmente. Entretanto, essa solução seria inviável, pois as baterias tem uma vida finita e em certas aplicações estes nós de sensores são colocados



em lugares não tão facilmente acessíveis, o que dificulta a troca ou recarga destas baterias, tornando-se uma tarefa difícil (SHAW III et al., 2013).

Pela conversão de energia disponível no ambiente, o coletor de energia pode prover a energia elétrica necessária para a vida útil do sistema wireless, tornando-o autônomo e possibilitando seu melhor aproveitamento e funcionalidade. (KAZMIERSKI e BEEBY, 2011).

Na mecânica, grande partes das análises e estudos são feitos através de aproximações por comportamentos lineares. As técnicas lineares e não-lineares tem suas vantagens e desvantagens. De uma maneira geral, as não linearidades podem ser geométricas ou físicas. As geométricas estão associadas ao movimento, no que diz respeito a restrições ou grandes deslocamentos. Já as físicas estão associadas ao comportamento do sistema, na parte referente aos acoplamentos e características constitutivas inerentes ao material (acoplamento eletromecânico dos materiais piezelétricos, por exemplo), entre outros. Por exemplo, a extração de energia de um sistema trabalhando em um regime não linear pode ser significativamente maior que a extraída de um sistema trabalhando na faixa linear, porém apresentam comportamentos dinâmicos bastante complexos e necessitam ser explorados e estudados para o melhor entendimento dos fenômenos envolvidos (DARMAYUDA et al., 2013).

Segundo Darmayuda et al. (2013), em casos onde a energia gerada é baixa, ou a energia inicial é nula, a utilização do método linear de extração de energia é ainda preferível em relação ao método não-linear.

No caso dos piezelétricos a abordagem pelo regime linear (limite de baixas deformações e sem a inclusão de não linearidades mecânicas ou constitutivas no sistema) se torna uma ótima opção, tanto do ponto de vista econômico, quanto pela maior simplicidade do sistema (DU TOIT e WARDLE, 2006).

A maioria dos dispositivos baseados em vibração apresenta uma desvantagem quando operam em condições lineares, correspondendo à potência de saída máxima em sua frequência de ressonância, resultando em um sistema de banda estreita. Assim, pequenos desvios de frequência podem produzir uma queda significativa na potência de saída. O principal benefício da introdução de não linearidades no sistema dinâmico de colheita de energia é o aumento da banda de operação do dispositivo. Estudos com sistemas não-lineares tem um valor inestimável para entender o comportamento de um piezelétrico em ambientes em que as características vibracionais acontecem mais complexamente por conta das variações e desvios de frequência.

Por este motivo, esse tipo de abordagem, na maioria das vezes, trás uma análise mais fiel da realidade de aplicação. Os estudos que visam ampliar a faixa de frequência de excitação se utilizam da inclusão de não suavidades mecânicas, como imãs, limitador de amplitude, osciladores, molas não lineares, estruturas bi-estáveis, massa de inércia para amortecer, ou ainda, o emprego de várias estruturas com frequência de ressonância diferentes (KAZMIERSKI e BEEBY, 2011). Esses elementos são utilizados visando sempre faixa de frequência de excitação dentro da faixa de ressonância do material para que possa, no ambiente dinâmico do dia a dia, maximizar a conversão eletromecânica.

## 1.1. Objetivo

Este trabalho tem como objetivo modelar numericamente um sistema capaz de descrever o comportamento de uma viga piezelétrica e sua geração de energia, dentro do regime linear, sob certas condições específicas de excitação.

Para atingir o objetivo geral do trabalho algumas etapas serão realizadas:

- Conceituar os materiais piezelétricos, o efeito da piezeletricidade para geração de energia e o comportamento desses materiais nos regimes linear e não linear.
- Desenvolver o modelo numérico com base na teoria das vigas de Euler-Bernoulli e no método da energia.
- Desenvolver um modelo numérico de um oscilador massa-mola-amortecedor arquétipo com um grau de liberdade acoplado a um circuito elétrico através de um piezelétrico capaz de simular a geração de energia de materiais piezelétricos sujeitos à vibração.
- Implementar o integrador Runge-Kutta de 4º ordem para resolver as equações diferenciais do modelo numérico.
- Junto à modelagem numérica, obter soluções analíticas, para resolução do sistema em questão, utilizando a Transformada de Laplace, a fim de conseguir uma comparação entre os dois métodos.
- Além de comparar os resultados de ambos os métodos, avaliar a acuracidade do modelo numérico, mediante a comparação dos seus resultados com os advindos da literatura (KIM et al., 2010), investigando valores de tensão elétrica, deslocamento e potência em resposta a variações de parâmetros como, resistência, frequência de excitação e acoplamento eletromecânico.
- Avaliar o modelo com e sem a introdução de uma massa de prova.

## **1.2. Organização do trabalho**

No capítulo 2 do trabalho será apresentado um breve histórico sobre a geração de energia a partir de fontes renováveis, a evolução dos estudos na área utilizando materiais piezelétricos e como esses materiais vêm sendo aplicados para geração de energia. No capítulo 3, após uma introdução dos materiais inteligentes, será esclarecido mais a fundo sobre o funcionamento dos materiais piezelétricos, os efeitos da piezeletricidade, as diferenças entre respostas de um sistema linear e não linear e as teorias e métodos utilizados. No capítulo 4, além da descrição do modelo utilizado, são apresentados os métodos numérico e analítico e as considerações para construção de cada um deles. No capítulo 5, serão expostas as validações dos métodos, a comparação entre as respostas dos mesmos e os efeitos que variáveis como resistência, massa, e acoplamento eletromecânico tem em relação a potência gerada. Por fim no capítulo 6 serão apresentadas as conclusões do trabalho a partir das análises feitas e dos resultados obtidos e serão dadas sugestões para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

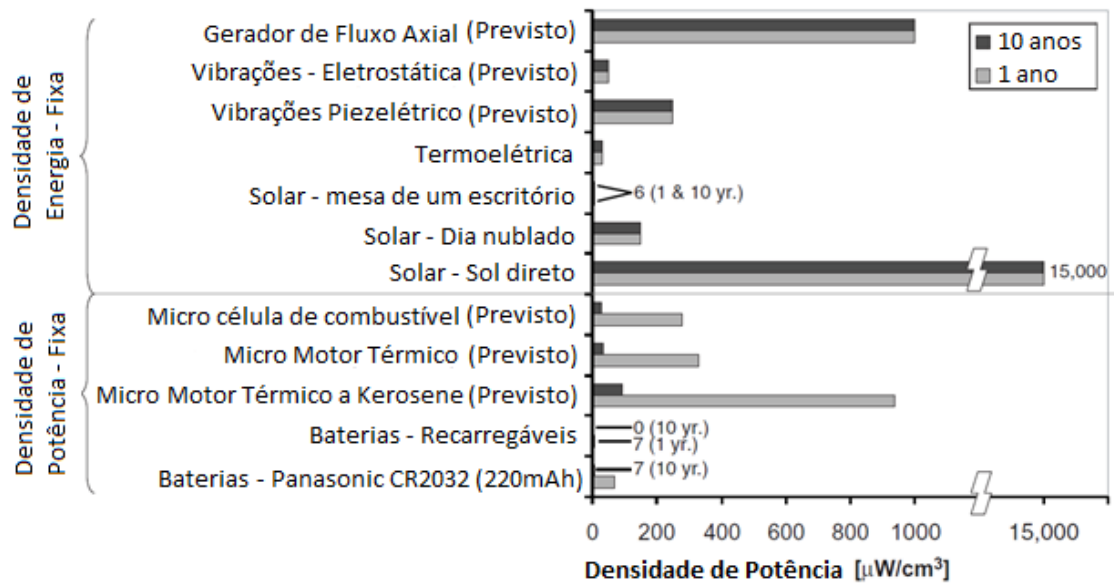
### 2. Revisão Bibliográfica

Nas sociedades antigas se obtinha energia de lenha para aquecimento e atividades domésticas, porém o consumo de energia foi crescendo com o passar dos anos. Com a Revolução Industrial o carvão, petróleo e gás se tornaram as fontes principais de energia, tanto das industriais como dos insumos individuais. Esses recursos energéticos além de finitos são poluentes para o meio ambiente e põem o planeta em risco a longo tempo. Com essa nova conscientização diversas fontes de energia alternativas começaram a ser exploradas: solar, eólica, hidrelétricas, etc. (GOLDEMBERG e LUCON, 2007).

Fala-se muito sobre esses tipos de energias provenientes de recursos naturais como água, vento e sol, mas essas fontes energéticas têm suas limitações e nem sempre conseguem ter seus equipamentos instalados em qualquer lugar. Os campos eólicos, por exemplo, necessitam de uma grande área para suas turbinas, precisam estar longe de áreas residenciais, por conta de seu barulho, e antes de ser implantado é feito um estudo da rota de pássaros para não interferir no ambiente natural de diversas espécies.

Procurando sempre melhorar e superar essas limitações, o desenvolvimento de novas tecnologias e estudos tanto relacionados a novos materiais, quanto a novas fontes de energia no campo de pesquisa em Energy Harvesting tem ganhado uma atenção especial. Um dos motivos dessa técnica estar sendo tão explorada se dá pela possibilidade de desprender energia de atividades do cotidiano (movimento humano), de movimentos induzidos pela operação de sistemas e equipamentos (vibrações) entre outros, possibilitando, assim, o aproveitamento de energias que normalmente se perdem para o ambiente sem nenhuma função.

A fim de se obter uma comparação entre os tipos de energias renováveis, DU TOIT (2005) classificou, utilizando um gráfico de densidade energética, ilustrado na Figura 1, alguns tipos de fonte segundo seus comportamentos ao longo de um período curto, de 1 ano, e um período mais longo, de 10 anos. Nota-se que o primeiro grupo, usualmente composto de baterias e pilhas, em longo prazo não consegue atender os nós sem precisar de uma reposição, o que aumenta o custo e inviabiliza certos tipos de aplicações. Esta, porém, é somente uma das considerações a se fazer ao se escolher uma fonte energética.



**Figura 1:** Comparação de fontes de energia para sensor de nós wireless (adaptado de DU TOIT, 2005).

Além do custo e tempo de vida da rede de nós, o tamanho, a localização e os requerimentos da rede devem ser levados em conta. Mesmo algumas fontes de densidade energética fixa, que possuem grande vantagem pela longevidade e distribuição contínua, podem ter uma péssima eficiência, se não forem bem utilizadas. Um bom exemplo é a energia proveniente do sol, esta tem uma alta densidade energética, quando o painel se encontra exposto diretamente ao sol, porém em uma mesa de escritório, se torna a de menor densidade. Em contrapartida, a energia de vibração tem uma extrema vantagem pela menor dependência do meio externo, sendo mais indicada e mais confiável em aplicações onde a continuidade de fornecimento é importante (DU TOIT, 2005).

## 2.1. Geração de Energia

A aplicação dessas novas fontes de energia no campo de pesquisa em Energy Harvesting baseado em vibração e utilizando materiais piezelétricos teve um grande destaque na alimentação de pequenos dispositivos eletrônicos e na geração de energia em lugares de difícil acesso. Os pesquisadores têm apresentado diversos modelos matemáticos (ADACHI e TANAKA., 2009; AJITSARIA et al., 2007; LIANG et al., 1996; LUMENTUT e HAWARD, 2009) e resultados experimentais (ERTURK e INMAN, 2009; LIAO e SODANO, 2008), a fim de testar a viabilidade de armazenamento e coleta dessa técnica.

Existem quatro aplicações principais para captação dessa energia: o piezelétrico (SODANO et al., 2005; SWALLOW et al., 2008), a eletromagnética (REID e JUDD, 2007; TORAH et al., 2007), a termoeétrica (ROWE, 2005) e a fotovoltaica (LEE et al., 1994). Nesta revisão o foco será apenas na captação de energia utilizando materiais piezelétricos.

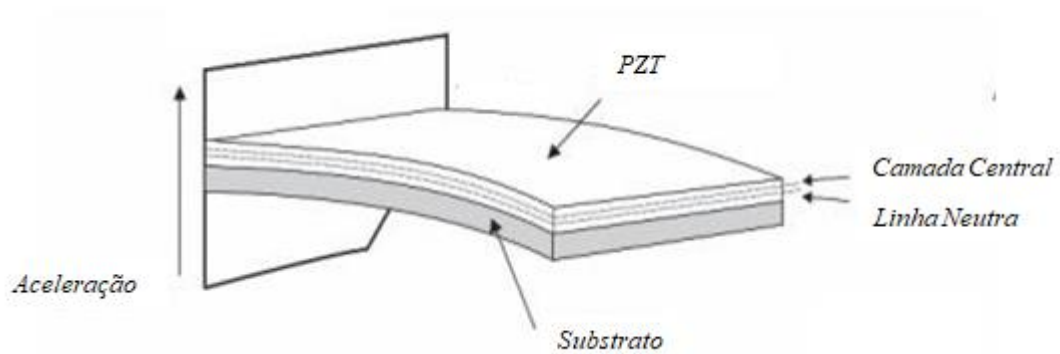
## **2.2. Geração de Energia com uso de Materiais Piezelétricos**

Pioneiros no estudo da conversão de energia utilizando piezelétricos, os pesquisadores Williams e Yates (1996) propuseram um aparelho que gerasse eletricidade ao estar num meio vibracional. Os autores conseguiram determinar, que a quantidade de energia gerada é proporcional ao cubo da frequência de vibração. Essa comprovação aconteceu devido a análises harmônico vibracionais utilizando um transdutor magnético com o objetivo de avaliar a viabilidade e otimização de design do mecanismo proposto. Os resultados encontrados mostraram que o aparelho tinha uma eficiência fraca em baixas frequências e um baixo fator damping era necessário para maximizar a conversão.

No mesmo ano, Umeda et al. (1996) também foram uns dos pioneiros nos estudos para tratar a conversão de energia advinda da vibração para energia elétrica e seu aproveitamento. Eles analisaram o ganho de eletricidade no impacto em queda livre de uma massa de aço com uma placa feita de material piezelétrico. No ano seguinte, Umeda et al. (1997) fizeram outra investigação analisando o processo de armazenamento dessa energia gerada, adicionando ao sistema um retificador de ponte e um capacitador. Mudando os parâmetros do circuito, como capacitância e grandeza dos impactos da massa, chegaram a uma eficiência de 35%.

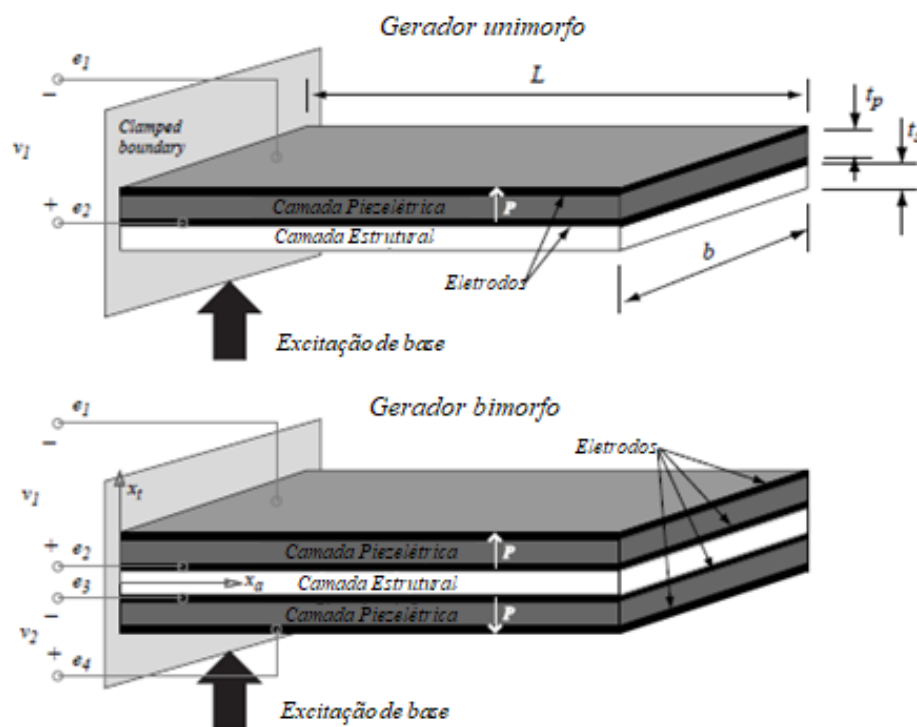
Goldfarb e Jones (1999) enxergaram a partir de um modelo analítico, que a maioria da energia gerada retorna para a fonte excitadora. Procuraram, então, comprovar usando um conjunto de pastilhas piezelétricas, que a máxima eficiência poderia ser alcançada se conseguisse minimizar a energia armazenada dentro do piezelétrico.

Um material piezelétrico muito utilizado por pesquisadores por possuir um alto coeficiente piezelétrico é o chamado PZT, uma cerâmica de titanato zirconato de chumbo. Esse material é muito explorado em uma geometria constituída de uma viga metálica retangular ou cantilever, onde uma de suas extremidades se encontra livre, podendo posteriormente receber elementos como massas, imãs, molas, etc. E a outra se encontra presa a um oscilador, como a ilustrado na Figura 2 (RAMADASS et al., 2010).



**Figura 2:** Configuração de vigas piezoeletricas (adaptado de RAMADASS et al., 2010).

Essa viga pode ser composta por uma camada ou mais camadas piezoeletricas, e são conhecidas como piezoelectric unimorph beam e bimorph cantilever beam, respectivamente (Figura 3). Por fornecerem maiores saídas de energia, as bimorfas são as mais usadas (RAMADASS et al., 2010).



**Figura 3:** Tipos de geradores piezoeletricos com geometria de viga, unimorfo (acima) e bimorfo (abaixo) (adaptado de DU TOIT, 2005).

Além de experimentos foram criados muitos modelos numéricos, a fim de prever o comportamento desses piezoeletricos em situações adversas sem precisar de testes. Ferreira et

al. (2016) utilizando uma das soluções para aumentar a eficiência da colheita de energia, o controle impulsionado, conduziram uma simulação numérica usando um modelo matemático linear chamado de “Desigualdades Matriciais Lineares” em um sistema multimodal, tendo um aumento da eficiência colheteira em 4 vezes.

Kašpárek et al. (2014) criaram um modelo real para controlar as configurações de parâmetros do sistema, de forma a comparar resultados experimentais com resultados obtidos por métodos numéricos. O objetivo era conseguir um bom comportamento com a histerese do piezoeletrico, e diminuir variações causadas por erros de entrada e ruídos, como sinal de feedback, para uma aplicação específica de servo válvulas. Os autores verificaram que seu modelo linear sem histerese não poderia simular totalmente o comportamento de um atuador piezoeletrico, porém para a aplicação testada, obteve resultados bem satisfatórios.

Darmayuda et al. (2013), utilizaram um circuito Buck Boost modificado para gerar energia elétrica por meio da colheita de energia piezoeletrica. Foram utilizados ambos os tipos de técnicas, tanto linear quanto não linear. Pode-se observar a comparação entre as duas coletas de energia na Tabela 1.

**Tabela 1:** Comparação coleta de energia para técnicas linear e não-linear em um circuito Buck Boost modificado (adaptado de DARMAYUDA et al., 2013).

| Parâmetros                                | Coleta Linear                                    | Coleta Não-linear                            |
|---|--|--|
| Princípios                                | Impedância                                       | Pulsação de tensão no ponto de extração      |
| Controlador                               | Relógio com frequência e ciclo de trabalho fixos | Sensor de tensão elétrica e gerador de pulso |
| Energia Inicial                           | Não é necessário                                 | Necessário                                   |
| Voltagem máxima teórica                   | Metade da condição de circuito aberto            | Duas vezes a condição de circuito aberto     |
| Média da Energia na entrada do Buck Boost | $I^2/4\omega C_{PZ}$                             | $2I^2/4\omega C_{PZ}$                        |
| Eficiência                                | 64%  | 103%*  |

\*O denominador utilizado é à entrada de energia do sistema de colheita de energia no regime linear



### 2.3. Geração de Energia no Sistema Linear

Apesar da técnica de extração de energia não linear ser capaz de coletar mais energia, em casos onde a energia gerada é muito pequena ou não se tem energia inicial, o método linear é preferível, como comentando na Introdução.

Darmayuda et al. (2016) citam alguns autores que utilizam técnicas lineares que otimizaram a extração de energia. OTTMAN et al. (2003) desenvolveram uma expressão para o ciclo de trabalho ótimo de um transformador de redução, operando em modo de condução descontínua. Com isso conseguiram, usando um esquema de controle simples, coletar 3 vezes mais energia que a taxa de carregamento direto da bateria em análise para o nível de excitação mecânica, chegando a 36,66 mW, o que é completamente adequado para a maioria dos aparelhos.

Lefeuvre et al. (2007) e Darmayuda et al. (2012) também rastrearam os pontos ótimos de trabalho dos geradores piezelétricos, utilizando um conversor Buck Boost trabalhando em DCM procurando eficiências máximas de conversão.

Kim et al. (2007), investigaram diferentes níveis de métodos de correspondência de impedância, a fim de aumentar a conversão eletromecânica através da escolha de um material cerâmico com uma constante de tensão piezelétrica alta e uma nova estrutura de transdutor otimizada. Foi verificado que utilizando a cerâmica em multicamadas, a corrente de saída pode ser aumentada em 10 vezes, enquanto a carga de saída pode ser reduzida em 40 vezes, aumentando a potência de saída em 100%.

D'hulst et al. (2010) avaliaram um sistema de colheita piezelétrica com diferentes circuitos de processamento de energia e com dois tipos de carregamentos, uma carga resistiva e outra carga retificadora CA-CC. Os circuitos foram calculados para os dois tipos de carregamento. O primeiro, emulando uma impedância resistiva, apresentou uma eficiência de apenas 40% no sistema como um todo, em contrapartida o segundo com a tensão de entrada constante e um conversor Buck Boost alcançou 64% de eficiência.

Sodano et al. (2002) investigaram a quantidade de energia gerada pela vibração em uma chapa de material piezelétrico, assim como dois métodos de armazenamento de energia. A primeira demonstração foi que o material poderia gerar no máximo 2mW quando excitado na sua frequência de ressonância. Em relação ao armazenamento, foram testados dois tipos, um

circuito capacitor e uma bateria recarregável. Esse estudo foi pioneiro na demonstração que um piezelétrico é capaz de recarregar inteiramente uma bateria recarregável, sem utilizar fontes de energia externa. Também mostrou que apesar de que os dois tipos pudessem ser utilizados, a bateria levou vantagem em relação ao poder de armazenamento e a rapidez da taxa de descarregamento.

Anton et al. (2007) apresentaram uma ampla revisão de Power Harvesting utilizando materiais piezelétrico (2003-2006) e abordaram tópicos como: melhoramento da eficiência e a geração de energia através de configurações do material piezelétrico, de circuitos e de métodos de armazenamento de energia, aplicação de Power Harvesting em atividades do ser humano, e etc. O estudo mostrou que a maior parte das pesquisas até a época eram focadas na caracterização do Energy Harvesting, ao invés do desenvolvimento de dispositivos. Os autores deste artigo consideram que o futuro do Energy Harvesting está no aprimoramento de sistemas completos (Energy Harvesting, armazenamento, e aplicação de circuito combinados), que apresentem uma fácil implementação.

Liao e Sodano (2008) descreveram um modelo teórico de um piezelétrico baseado em um sistema de Energy Harvesting de simples aplicação. Esse modelo forneceu uma predição da energia gerada em torno de um único modo de vibração, permitindo uma otimização dos parâmetros do sistema, para que se tenha o maior desempenho possível. Os autores avaliaram através de simulações numéricas deste modelo, uma expressão para a resistência ótima e um parâmetro para descrever a eficiência do sistema. Também validaram experimentalmente a expressão para a resistência ótima e o parâmetro que descreve a eficiência do coeficiente de acoplamento eletromecânico desenvolvido com o modelo citado.

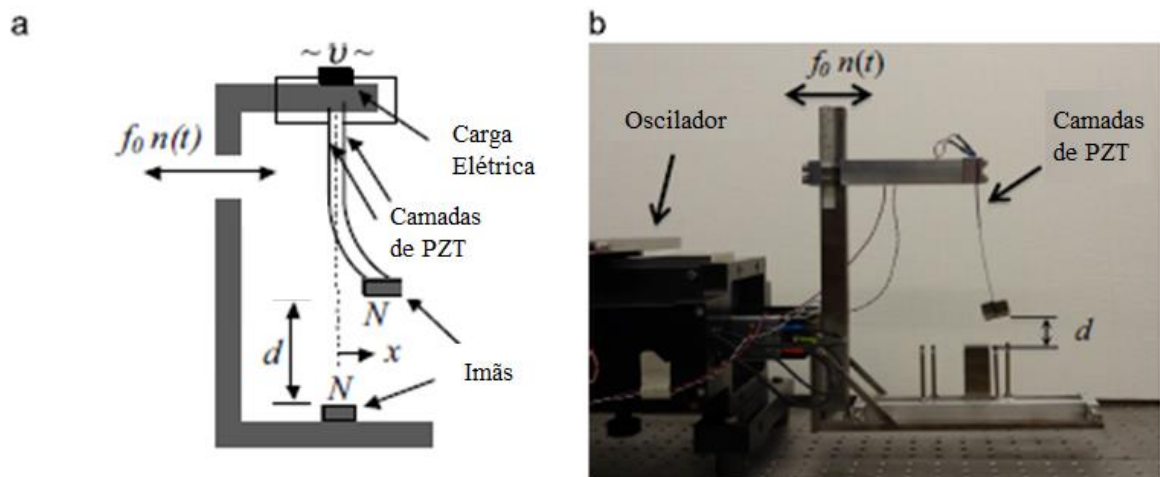
## **2.4. Geração de Energia no Sistema Não-Linear**

O grande obstáculo da geração de energia a partir de vibrações é o desenvolvimento de dispositivos que possam converter energia em uma ampla faixa de frequência de excitação, de acordo com as fontes disponíveis no ambiente. Na maioria dos casos deseja-se que a operação dos sistemas seja dentro da faixa de frequência de ressonância por ser a região de maiores amplitudes e, conseqüentemente, apresentarem maior geração de energia (INMAN e CUDNEY, 2000).

Ertuk e Inman (2009) investigaram os efeitos de vibrações aleatórias de banda larga em um sistema de colheita de energia. Ertuk e Inman (2010) apresentaram estudos teóricos e experimentais comparando as variações não-lineares mecânicas de um sistema piezoelástico e um piezomagnetoelástico. Esse estudo mostrou que o sistema piezo-magneto-elástico apresenta um comportamento similar ao oscilador do tipo Duffing. Verifica-se ainda que a configuração piezo-magneto-elástica pode gerar na potência uma ordem de magnitude maior em comparação com o equivalente piezo-elástico em várias frequências.

Ferrari et al. (2010) realizaram experimentos com um sistema piezelétrico não linear. O sistema era composto de um oscilador com uma placa piezelétrica fixada e dois ímãs, um foi posto fixo na extremidade da placa e outro, com polaridade oposta, foi posto na base. O experimento mostrou uma diminuição na frequência de ressonância linearizada do conversor e um aumento correspondente no deslocamento quando a distância entre os ímãs diminuía. Quando a distância era curta o suficiente um sistema biestável é criado e a voltagem de saída no conversor piezelétrico aumenta significativamente durante uma banda larga mais ampla, quando relacionada com a de um comportamento linear.

De Paula et al. (2014) estudaram voltagem proveniente de um gerador não linear piezo-magneto-elástico similar ao utilizado por Ferrari et al. (2010), como o mostrado na Figura 4, submetido a excitações diversas. Os autores analisaram qualitativamente o desempenho tanto numericamente quanto experimentalmente do potencial elétrico gerado por um sistema linear, um sistema não-linear biestável e um sistema não linear monoestável devido à vibração aleatória. Os resultados mostraram que o sistema biestável, que vibra em torno de dois pontos de equilíbrio, tinha uma melhor performance e que esse sistema apresenta uma relação importante entre a variação de excitação e o potencial energético. Três regiões foram definidas e a transição entre esses pontos seria a região desejada de oscilação.



**Figura 4:** Esquema do coletor piezomagnetoelástico (adaptado de DE PAULA et al. , 2014).

## 2.5. Aplicações com uso de Materiais Piezelétricos para Geração de Energia

O movimento do corpo humano; aparelhos domésticos e de uso pessoal; movimentos de estruturas como pontes e prédio e componentes de automóveis e aviões são exemplos de aplicações onde se encontram níveis de vibrações úteis para um acoplamento piezelétrico. Além de depender da quantidade de energia cinética (vibração), a energia elétrica resultante do processo depende do poder de conversão elétrica.

Uma das aplicações mais conhecidas no meio, de um caráter prático, é a utilização de piezelétricos em solas de calçados, aproveitando o impacto do calçado com o chão durante o caminhar, como mostraram Kymissis et al. (1998). Howells (2008) utilizou a mesma ideia com uma aplicação para o exército americano. O dispositivo foi capaz de gerar 90 mW, o que é suficiente para alimentar um celular básico em stand-by. Em 2012, Pozzi et al. Desenvolveram um dispositivo que utilizava o movimento da articulação do joelho como input da conversão, gerando em média 2 mW.

Williams e Yates (1996) e Kim et al. (2011) analisaram vários carregamentos sobre uma ponte e a geração de energia associada. A energia cinética de prédios e pontes varia de acordo com as condições do ambiente nos quais estão presentes. Os prédios apresentam uma resposta que depende de vento, construções em volta, elevadores, passagem de fluidos por dutos, atividades sísmicas, dentre outras. E as vibrações nas pontes sofrem influência de tráfego de veículos, condições climáticas e a magnitude das frequências dependem da natureza da estrutura.

Maurini et al. (2006) analisaram métodos numéricos para análises modais de barras piezelétricas escalonadas (stepped), utilizando um modelo linear baseado na teoria de Euler-Bernoulli, porém incluindo efeitos 3D. Os autores utilizaram 4 métodos numéricos diferentes, sendo eles LEN, AM, EAM e FE, concluindo que o modelo de Euler-Bernoulli atende corretamente as dinâmicas de uma barra piezelétrica escalonada com típica geometria e propriedades, dando uma das bases do presente trabalho.

Li et al. (2009) perceberam que a geração de energia a partir do impacto dos pés durante uma caminhada tinha influência da angulação na qual o passo era dado. A vibração referente ao movimento humano é caracterizada em baixa frequência e altas amplitudes. Na Holanda já existe uma boate, “Sustainable Dance Club”, onde o piso é feito com placas de materiais piezelétricos. Essa instalação proporciona a geração de 10% da energia consumida pela boate em dia de grande movimento.

Voltando ao campo de aproveitamento dos movimentos corporais, Kalyanaraman e Babu (2010) utilizaram a pressão dos dedos ao digitar e colocaram materiais piezelétricos sob teclas de notebooks e celulares, com o objetivo de carregar uma bateria secundária, ligada a principal para casos de emergência.

Erturk e Inman (2011) lançaram um livro chamado *Introduction to Piezoelectric Energy Harvesting* contendo todo o conhecimento resultante de suas pesquisas e artigos publicados ao longo dos anos. Esse livro se tornou referência no assunto de coleta de energia com materiais piezelétricos.

## Capítulo 3

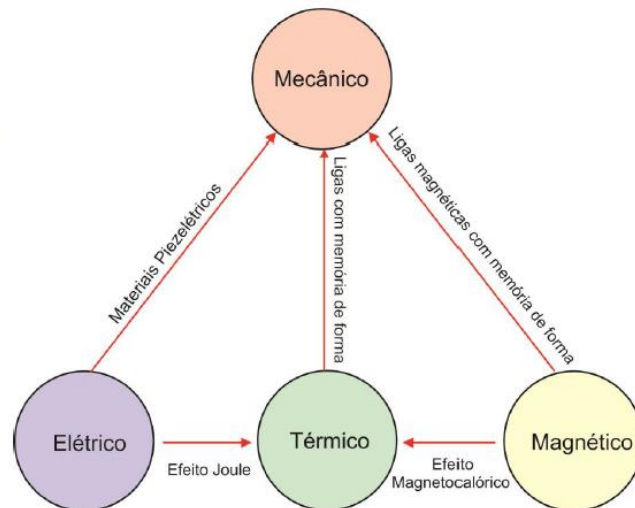
### 3. Fundamentação Teórica

Neste capítulo serão apresentados todos os conceitos teóricos que se aplicam ao presente projeto. Primeiramente, será feita uma breve introdução sobre materiais inteligentes de maneira geral, e em seguida uma descrição dos materiais piezelétricos incluindo sua história, características e seu funcionamento no sistema linear e não linear.

#### 3.1. Materiais Inteligentes

Há séculos os metais vêm desempenhando um papel importante em todos os campos de atuação existentes. Com o avanço tecnológico foi possível obter um maior entendimento sobre os efeitos da microestrutura e desenvolver novos métodos de processamentos de materiais dando origem aos materiais compósitos, por exemplo. Os materiais inteligentes surgiram através da demanda por materiais com funcionalidades adicionais em atuadores e sensores (LAGOUDAS, 2008).

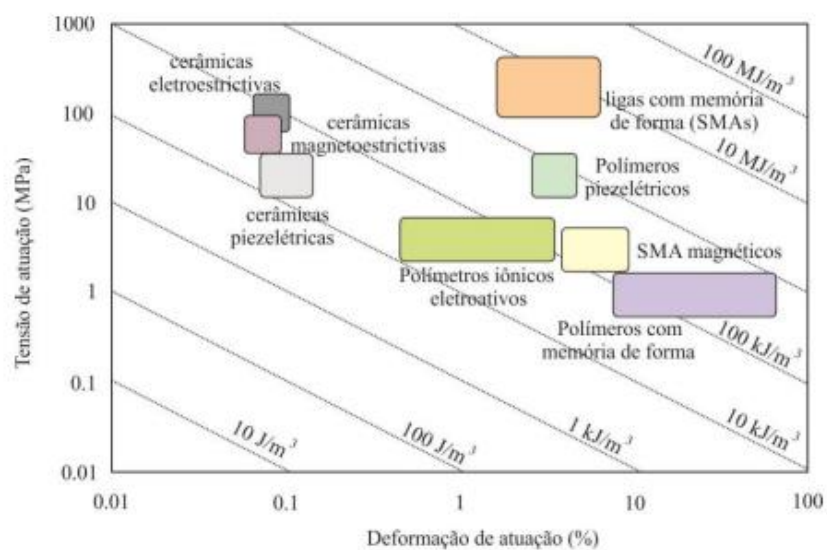
Esses materiais são capazes de gerar uma resposta mecânica quando submetidos a um estímulo não mecânico (térmico, elétrico, magnético, etc.), como as ligas de memória de forma SMA que convertem energia térmica em deformação mecânica. Materiais como os piezelétricos, são capazes de receber impulsos mecânicos (vibrações, deformação, etc.) e responder a esse impulso com um sinal elétrico. Essas respostas são, normalmente, de uma maior magnitude que as apresentadas por materiais convencionais (LAGOUDAS, 2008). A Figura 5 ilustra alguns desses efeitos relacionados a materiais inteligentes.



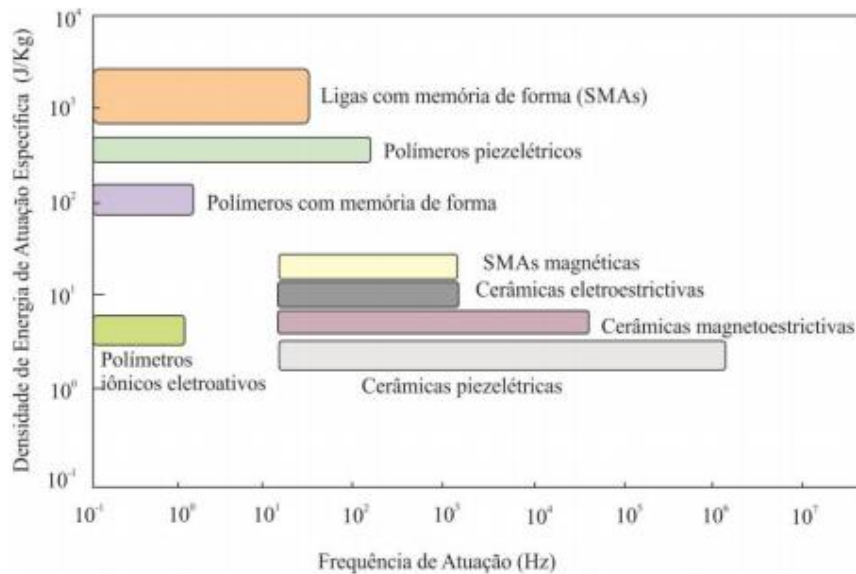
**Figura 5:** Tipos de relação que alguns dos materiais inteligentes podem apresentar (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017).

Piezelétricos e ligas de memória de forma são exemplos de materiais de acoplamento direto, isso significa que tanto o esforço mecânico quanto o não mecânico podem servir de sinal de entrada e o outro como de saída. Já os fluidos eletro-magnetoreológicos um sinal elétrico ou magnético, respectivamente, pode indiretamente ser relacionado com um comportamento mecânico, como a mudança de viscosidade do fluido (LAGOUDAS, 2008).

As Figuras 6 e 7 apresentam diagramas indicando as faixas de atuação desses materiais em função da deformação, densidade de energia, frequência e tensão.



**Figura 6:** Diagrama indicando a densidade de energia de atuação em função da deformação e tensão aplicada (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017).



**Figura 7:** Diagrama comparando a faixa de frequência para atuação de cada material (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017).

### 3.2. Materiais Piezelétricos

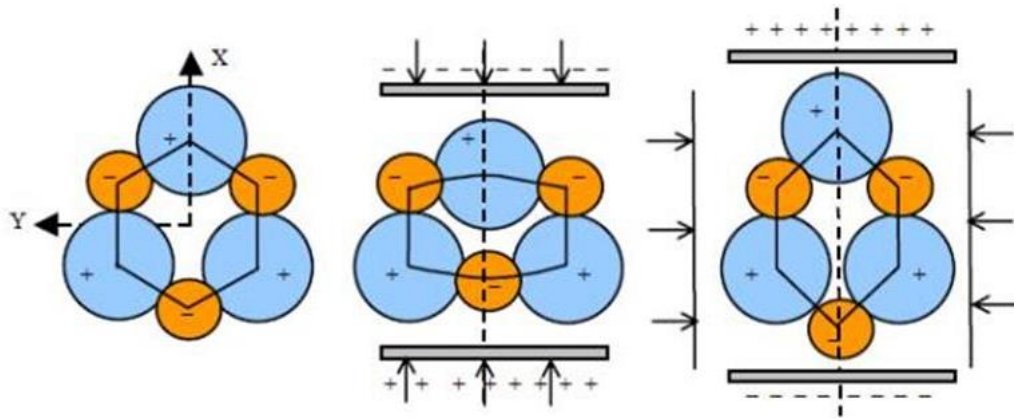
O efeito piezelétrico foi descoberto no final do século XIX pelos irmãos Curie, que perceberam que alguns materiais, como os cristais de quartzo e sal de Rochelle, tinham propriedades interessantes em seu estado natural. Naquela época esse comportamento não foi muito explorado, pois a quantidade de sinal elétrico produzido pela deformação do material era considerada muito pequena. Além disso, para medir esse sinal elétrico era necessária uma instrumentação ainda não desenvolvida (LEO, 2007).

Durante a segunda guerra mundial um matemático francês chamado Langevin desenvolveu um equipamento subaquático, o transdutor. Esse dispositivo utilizava materiais piezelétricos para produzir ondas mecânicas e interpretar suas respostas eletrônicas a fim de localizar submarinos (LEO, 2007). Até hoje esse material continua a ser explorado para desenvolver transdutores e receptores ultrassônicos, osciladores eletrônicos, filtro de vibrações em câmeras, sensores, etc. Alguns exemplos destes materiais são Cristais de Quartzo, Turmalina, PZT (Titanato Zirconato de Chumbo) entre outros.

A estrutura atômica do quartzo, por exemplo, é constituída por dois átomos de oxigênio (cargas negativas) e um de silício (carga positiva) conforme esquematizado na Figura 8. No estado natural, ou seja, na ausência de tensões e campos elétricos, os átomos se alinham de



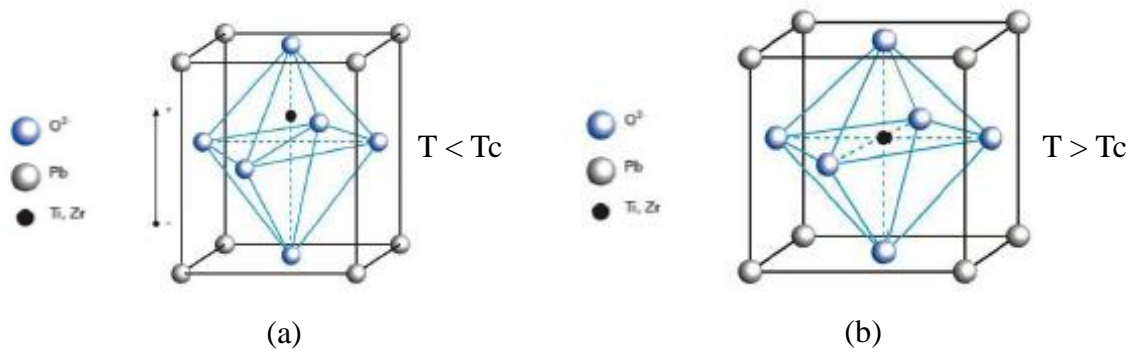
forma a permanecer com carga total nula nos plano XY. Após aplicar uma força de tração ou compressão na direção X ou Y do cristal, o alinhamento dos átomos sofre uma variação, ocasionando um desbalanceamento de cargas que gera cargas elétricas externas. No efeito inverso, a aplicação de campos elétricos externos nas mesmas direções X ou Y faz com que o material sofra uma deformação proporcional a este campo (LEO, 2007).



**Figura 8:** Estrutura atômica do quartzo. (a) Célula neutra; (b) Célula com carga em X; (c) Célula com carga em Y (Disponível em: <http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/08/a-piezoelasticidade-no-cotidiano.html>).

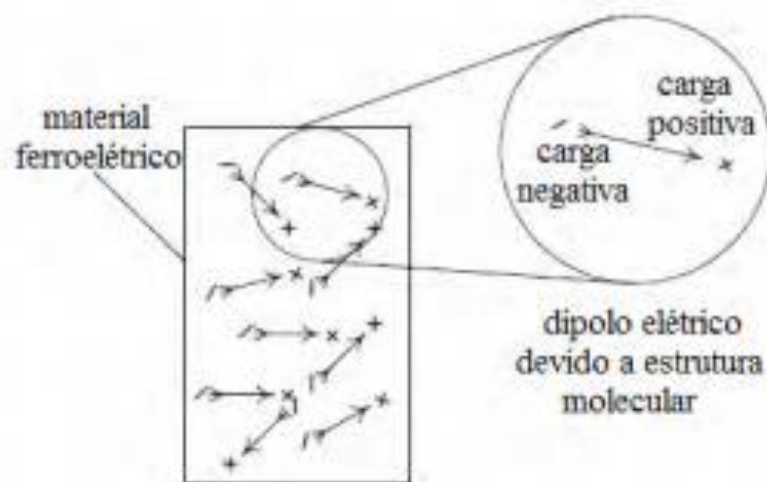
O fenômeno da piezeletricidade nesses cristais é considerado fraco e com pouca utilidade prática, por isso surgiu à necessidade de se terem materiais piezelétricos com melhores propriedades, motivando o surgimento de materiais sintéticos que exibem propriedades piezelétricas. Os PZTs são exemplos destes materiais.

A fabricação dos PZTs, tipicamente, consiste em uma mistura de materiais que exibem propriedades piezelétricas, como chumbo (Pb), zircônio (Zr) e titânio (Ti). Esse material é formado por domínios, blocos microscópicos, que são compostos por células unitárias tetragonais distorcidas. Se este material estiver com a temperatura acima de temperatura de Curie, a configuração da sua célula unitária se apresenta na Figura 9 (b). Quando esse material se encontram abaixo da temperatura Curie, como mostrado na Figura 9 (a), a posição do íon de titânio ou de zircônio, dentro do domínio muda, fazendo com que as células se polarizem e orientem na mesma direção, formando, assim, um dipolo elétrico.



**Figura 9:** Estrutura atômica do PZT: (a) configuração com a temperatura do material acima da temperatura de Curie; (b) configuração com a temperatura do material abaixo da temperatura de Curie (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017).

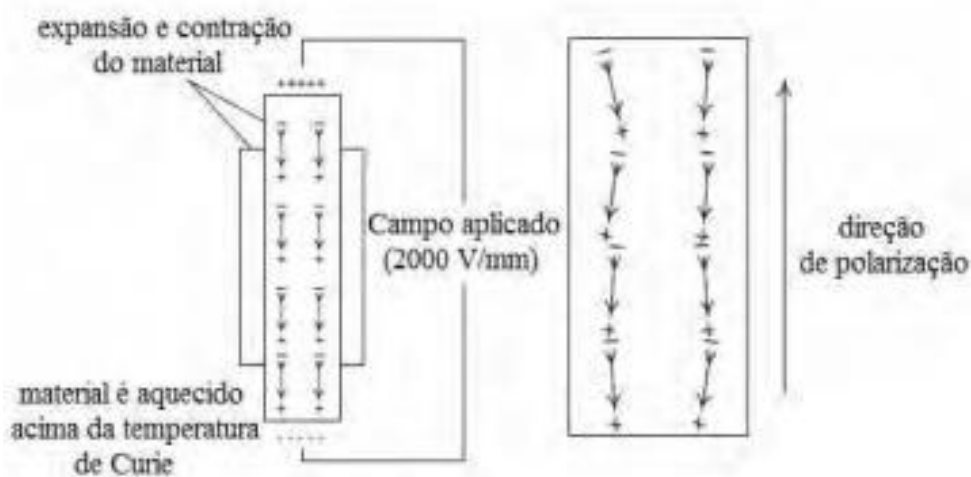
Os materiais piezelétricos pertencem a uma classe de materiais conhecida como ferroelétricos. Após a fabricação desses materiais suas propriedades piezelétricas não aparecem muito, pois os dipolos elétricos exibem uma orientação aleatória, como ilustrado na Figura 10 (LEO, 2007).



**Figura 10:** Dipolos elétricos que conduzem o acoplamento eletromecânico em materiais piezelétricos (Imagem traduzida de LEO, 2007).

Para orientação de um dipolo em relação a outro utiliza-se o processo de polarização. A polarização requer que o material piezelétrico seja aquecido a uma temperatura acima da temperatura de Curie e que seja submetido a um campo elétrico de alta intensidade (tipicamente, 2000 V/mm). O aquecimento permite que os dipolos se rotacionem livremente, desde que o material seja macio em altas temperaturas, e o campo elétrico produz um alinhamento dos

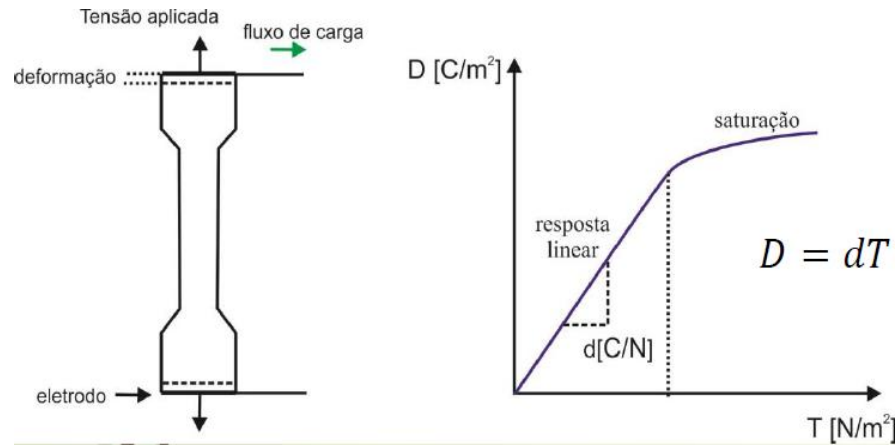
dipolos ao longo da direção do campo. Junto a isso o material expande na direção do campo e contrai na direção transversal, como mostrado na Figura 11. Rapidamente reduzindo a temperatura e removendo o campo elétrico tem-se um material cujos dipolos elétricos são orientados na mesma direção, referenciada como a direção de polarização do material (LEO, 2007).



**Figura 11:** Representação visual do acoplamento entre os domínios físicos (Imagem traduzida de LEO, 2007).

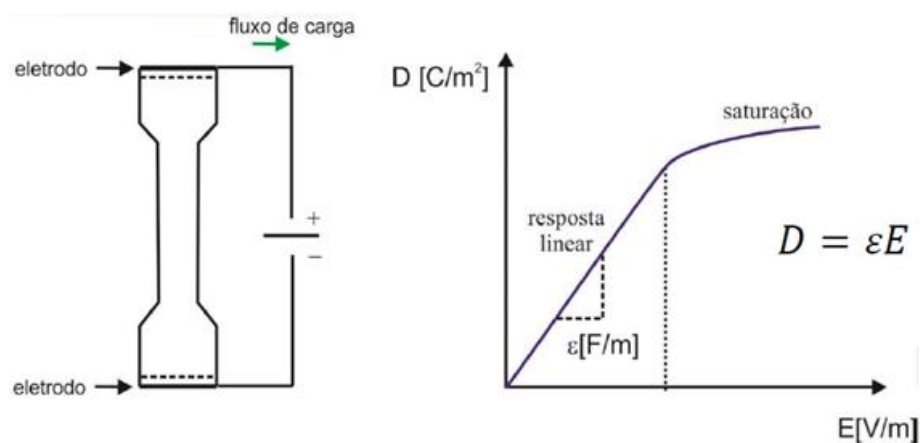
### 3.2.1. Efeitos da Piezeletricidade

O Efeito direto da piezeletricidade é definido como a mudança na polarização elétrica através da variação de um carregamento mecânico aplicado. Então supondo que um material piezelétrico esteja sendo submetido à aplicação de força de tração, além da deformação elástica natural do material, o piezelétrico produz um fluxo de carga entre os eletrodos despostos em suas extremidades, provocando um dipolo elétrico dentro do material. Esses eletrodos são capazes de medir esse fluxo. Na Figura 12 pode-se observar o experimento citado, e um gráfico gerado, onde há uma linearidade entre tensão e descarga elétrica durante certo intervalo de tensão (LEO, 2007).

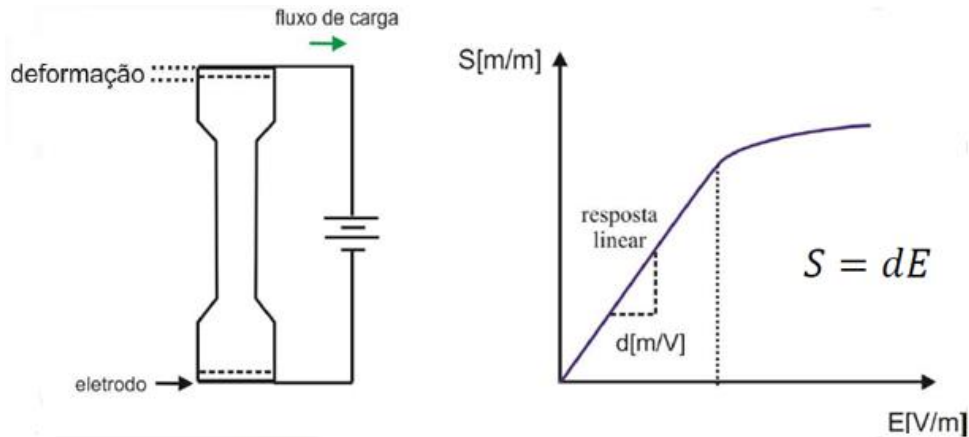


**Figura 12:** (a) Efeito Direto da Piezeletricidade; (b) Relação entre tensão e descarga elétrica em materiais piezoelétricos (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017).

No gráfico da Figura 12 vê-se que ao aplicar uma tensão trativa ( $T$ ) o material pode apresentar deslocamento elétrico ( $D$ ). No efeito inverso há uma mudança na deformação ou tensão do material devido a uma aplicação de campo elétrico. Então utilizando o mesmo exemplo do efeito direto, os eletrodos serão responsáveis para capturar a carga elétrica desenvolvida pelo material. Assim como a deformação do material gera, no efeito direto, uma variação na arrumação dos átomos presentes no material, o campo elétrico desempenhará essa mesma função, provocando uma mudança de tamanho. A Figura 13 ilustra essa situação e mostra uma relação entre o campo elétrico ( $E$ ) aplicado e o deslocamento elétrico ( $D$ ) produzido. Enquanto a Figura 14 ilustra a mesma situação, porém agora com presença de deformação ( $S$ ) e a relação entre o campo aplicado e a deformação sofrida pelo material (LEO, 2007).



**Figura 13:** Relação entre campo elétrico e a descarga elétrica em materiais piezoelétricos (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017).



**Figura 14:** Relação entre campo elétrico e deformação em materiais piezelétricos (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017).

Estes resultados podem ser descritos por equações mecânicas e eletromagnéticas combinadas, sendo possível a operação de modo direto ou inverso considerando a aproximação unidimensional e linear.

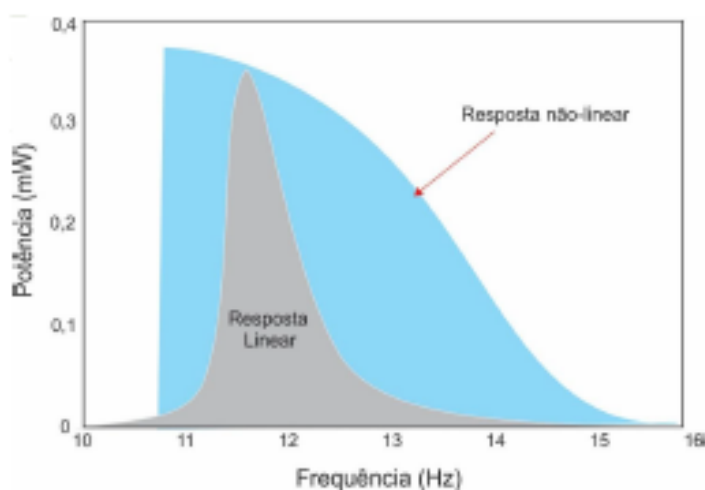
$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^E \mathbf{T} + \mathbf{d} \mathbf{E} \quad (\text{Efeito Inverso}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} \mathbf{T} + \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma \mathbf{E} \quad (\text{Efeito Direto}) \quad (3.2)$$

sendo a deformação,  $S$ , a tensão,  $T$ , o deslocamento elétrico,  $D$ , e o campo aplicado,  $E$ .  $\mathbf{s}^E$  é a constante de flexibilidade elástica,  $\mathbf{d}$  é acoplamento piezelétrico e  $\boldsymbol{\varepsilon}^T$  a permissividade elétrica. Os sobrescritos “ $E$ ” e “ $T$ ” significam medições das constantes feitas a campo elétrico e tensão mecânica nulas ou constantes, respectivamente.

### 3.2.2. Resposta de um sistema linear e não linear

A geração de energia tem um bom desempenho quando o material é excitado em sua frequência natural. Os materiais piezelétricos normalmente apresentam uma linearidade em suas respostas tanto de deformação, quanto de sinais elétricos. Porém vem sendo muito estudado o comportamento destes materiais quando adicionados elementos que geram não linearidade, a fim de aumentar a potência gerada por uma mesma faixa de frequência. A Figura 15 mostra a diferença entre uma resposta de um dispositivo com piezelétrico com comportamento linear e uma resposta do mesmo dispositivo com comportamento não linear.

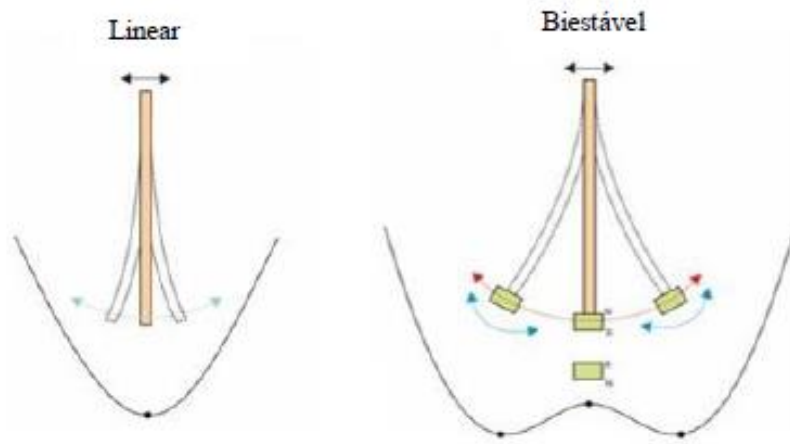


**Figura 15:** Representação qualitativa da Resposta linear e não linear de um dispositivo com material piezelétrico (Curso de Materiais Inteligentes CEFET/RJ, 2017).

Quando adicionado um elemento que pode ocasionar a não linearidade, como uma massa ou um ímã o piezelétrico oscila de acordo com as equações de Duffing. Essas equações (Equação 3.1) são equações diferenciais não-lineares de segunda ordem usadas para modelar certos sistemas com elasticidade não-linear.

A equação de Duffing pode ser vista como uma equação que descreve as oscilações de uma massa presa a uma mola não linear junto a um amortecedor linear. A força de restauração fornecida pela mola não linear é descrita como  $F = -\beta x - \alpha x^3$ . Este sistema adota diferentes comportamentos dependendo dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Quando  $\alpha=0$ , o sistema é linear com um único ponto de equilíbrio. Para  $\alpha > 0$ , o sistema adota um comportamento chamado “hardening” (endurecimento), e quando  $\alpha < 0$ , o sistema adota um comportamento chamado “softening” (amolecimento). Para valores de  $\beta > 0$ , o sistema é não-linear monoestável e oscila em torno de um único ponto de equilíbrio, já para valores  $\beta < 0$ , o oscilador é não-linear biestável e oscila em torno de dois pontos de equilíbrio, sendo um estável e um metaestável.

A Figura 16 ilustra o comportamento de uma viga de piezelétrico junto aos possíveis pontos de equilíbrio quando esta se encontra em uma configuração de regime linear e não-linear biestável.

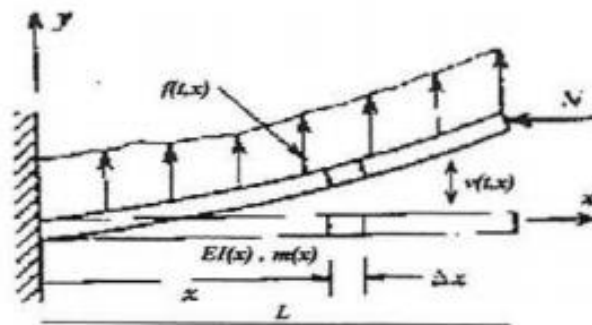


**Figura 16:** Comportamento Linear e Não Linear Biestável e seus possíveis pontos de equilíbrio (BORGES e COSTA, 2017).

### 3.3. Teoria das vigas de Euler-Bernoulli

A teoria de Euler-Bernoulli é uma das teorias existentes para análise infinitesimal de vigas que permanecem com suas propriedades físicas inalteradas, não importando em qual direção de propagação os fenômenos, que incidem sobre elas, estão. Essa teoria permite calcular as características de deflexão de uma viga sob qualquer carregamento, estático ou dinâmico desprezando cisalhamento e a inércia de rotação, então supõe-se que, após deflexão, as seções transversais planas permanecem planas e perpendiculares a linha neutra (GIARETA, 2011).

A Figura 17 mostra uma viga fixa-livre, como a considerada no presente trabalho, de comprimento  $L$ , deslocamento transversal  $v(t, x)$  e uma força externa  $f(t, x)$  (que no trabalho será a força exercida pelo oscilador) (GIARETA, 2011).



**Figura 17:** Viga de Euler – Bernoulli (GIARETA, 2011).

Junto a pesquisas feitas na área de fabricação de equipamentos para geração de energia utilizando materiais piezelétricos, muitos pesquisadores têm desenvolvido modelos analíticos e numéricos, a fim de não só analisar e prever as características dinâmicas dessas estruturas, como também de aperfeiçoar o seu design em aplicações futuras. A teoria de Euler-Bernoulli tem sido aplicada nesses estudos dinâmicos de geração de energia com piezelétricos em conjunto com o método de energia (KIM et al., 2010).

### 3.4. Método de Runge-Kutta de 4° ordem

O método de Runge-Kutta foi desenvolvido em meados de 1900 pelos matemáticos alemães Runge e Kutta com o objetivo de solucionar equações diferenciais ordinárias. O método clássico iterativo de quarta ordem, possui um erro acumulado na ordem de  $O(h^4)$  (TAN, D; CHEN, Z, 2012). Comparado com outros métodos de resolução de equações diferenciais, o algoritmo de Runge-Kutta possui uma precisão e flexibilidade muito grande, tendo como base sua estrutura a expansão da série de Taylor, o que confere uma boa estabilidade e convergência (LIU et al., 2011).

Outros métodos de Runge-Kutta foram desenvolvidos ao longo dos anos e algumas conclusões sobre estes métodos são relatadas por Tan e Chen (2012). Os autores citam que a maioria dos matemáticos consideram o método de Runge-Kutta de 4° ordem o método mais eficiente para resolver problemas de valores iniciais.

As fórmulas do método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem são apresentadas nas equações 3.3 até 3.7.

$$K_1 = f(x_n, y_n) \quad (3.3)$$

$$K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right) \quad (3.4)$$

$$K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right) \quad (3.5)$$

$$K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \quad (3.6)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (3.7)$$



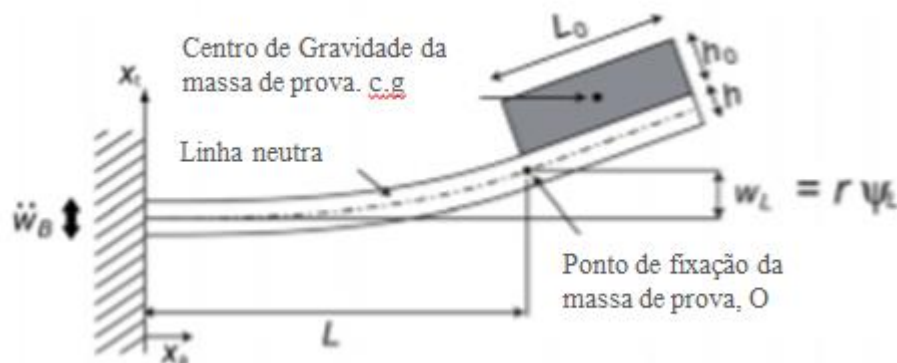
## Capítulo 4

### 4. Metodologia

Neste capítulo será descrito qual foi o modelo utilizado para representar o sistema analisado e quais foram os métodos utilizados para obter os resultados apresentados no trabalho. Um único modelo foi utilizado durante todo o trabalho: sistema de um grau de liberdade massa-mola, amortecedor com um acoplamento representando o material piezelétrico. Para se obter a resolução deste modelo diversos métodos numéricos e analíticos podem ser utilizados. Para o presente trabalho o método numérico foi desenvolvido pelos autores do mesmo, e o método analítico teve base nas equações apresentadas por Du Toit (2005). Ao longo do capítulo são discutidas as principais características de cada método.

#### 4.1. Modelo para o Sistema Analisado

A Figura 18 apresenta um desenho esquemático do sistema a ser analisado. Este sistema foi estudado por Kim et al. (2010), sendo composto de um elemento piezelétrico, uma camada estrutural, eletrodos e um dispositivo apropriado para extrair os sinais de tensão elétrica e potência. Será considerado como um sistema sem massa de prova, uma viga piezelétrica, com comprimento bem maior que os deslocamentos que esta apresentará, a fim de permanecer, durante todo o estudo, no sistema linear. Quando introduzida uma massa de prova, esta será alocada na extremidade livre da viga, como indicado na Figura 18.

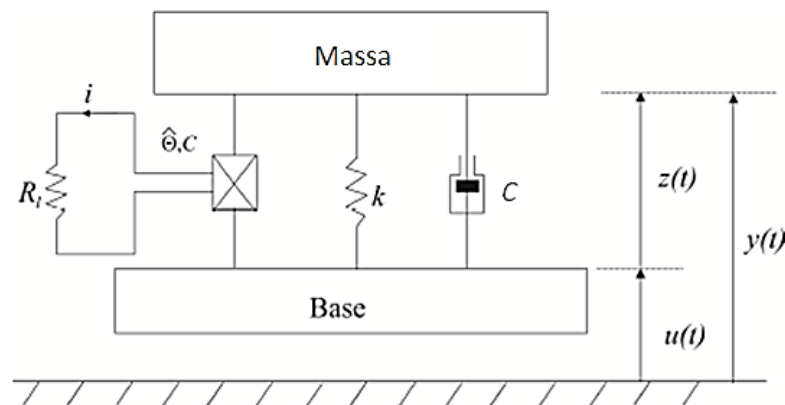


**Figura 18:** Representação esquemática do sistema considerado no trabalho (adaptado de KIM et al., 2010).

Em vigas longas, a tensão por cisalhamento é muito menor que a tensão normal, podendo ser desprezada se  $\frac{L}{h} \geq 10$  (HIBBELER R. C., 2010). A viga apresentada por Kim et al. (2010) tem comprimento (L) de 53 mm e espessura (h) de 0.675 mm, tendo a razão entre eles igual a 78,5 e podendo, assim, ser considerada como uma viga longa e ser analisada segundo o modelo de viga de Euler-Bernoulli.

A metodologia aqui apresentada visa o estudo do comportamento e desempenho de materiais piezelétricos sob o efeito de forças externas utilizando um sistema de vibração de base de Energy Harvesting.

Neste trabalho, o sistema apresentado na Figura 18, composto por um sistema contínuo com infinitos graus de liberdade, pode ser representado através de um modelo simplificado composto por um sistema mecânico de um grau de liberdade massa, mola amortecedor, conectado a um circuito elétrico através de um elemento piezelétrico, conforme mostrado na Figura 19.



**Figura 19:** Modelo Archetypal para um sistema de vibração de base de Energy Harvesting (TRIPLETT e QUINN, 2009).

O sistema mecânico é composto por um oscilador com uma massa  $M$  que apresenta um deslocamento  $y(t)$ , a excitação de base é representada por  $u = u(t)$ , e  $z(t)$  representa o deslocamento da massa em relação à base. Esse oscilador tem um coeficiente de amortecimento linear  $C$ , e uma mola que, como se trata de um estudo linear, tem a rigidez fixa igual a  $K$ . Se o modelo fosse ser utilizado para um estudo envolvendo a presença de alguma não-linearidade na rigidez, poderíamos assumir uma força tipo Duffing, essa rigidez  $K$  seria substituída por um força de restauração de rigidez não linear  $F(z)$ , apresentada no subitem 3.2.2. Os elementos de

mola e de amortecedor são incorporados ao modelo com o objetivo de representar o comportamento da viga do sistema estudado, mostrado na Figura 18. É importante ressaltar que efeitos de não-linearidades na viga, como grandes deslocamentos ou comportamentos não-linear do material não estão sendo considerados.

O acoplamento eletromecânico  $\theta$  é composto de um elemento piezelétrico conectado a um circuito elétrico representado pela resistência  $R_l$  e capacitância  $C_p$ , e a tensão elétrica que passa pelo piezelétrico é representada por  $v$ .

As equações de movimento do sistema de vibração apresentado podem ser escritas como:

$$M\ddot{z} + b\dot{z} + Kz - \theta v = -B_f \ddot{w}_B \quad (4.1)$$

$$\theta \dot{z} + C_p \dot{v} + \frac{1}{R_l} v = 0 \quad (4.2)$$

O vetor de forçamento,  $B_f$ , é responsável pelo carregamento inercial na estrutura da viga devido às excitações da base. Sendo  $\ddot{w}_B$  a aceleração da base.

Todos os resultados de deslocamento, tensão elétrica e potência, gerados e apresentados neste trabalho, quando houver alguma variação de parâmetros que não seja o tempo, como, por exemplo, número de períodos, frequência, resistência e acoplamento eletromecânico, são obtidos através do valor máximo encontrado no último período. É considerado o valor máximo por este representar o valor da amplitude da curva de resposta, e considera-se o último período, pois nele tem-se a certeza de que o sistema se encontra em um regime permanente.

Os valores de deslocamentos,  $z$ , obtidos através da integração das Eqs. (4.1) e (4.2) serão multiplicados pelo modo de vibração normalizado  $\psi_r$  segundo a abordagem mencionada por Kim et al. (2010), logo os valores de deslocamentos apresentados nesse trabalho serão obtidos através da equação:

$$r = z\psi_r \quad (4.3)$$

## 4.2. Metodologia Analítica

O método analítico se baseia em fórmulas e equações matemáticas bem definidas, ordenadas e finitas, tendo como resultado soluções fechadas exatas. Em casos onde a geometria e condições do sistema são simples, a solução analítica consegue fazer uma correta representação aproximada do problema, sendo capaz, portanto, de fundamentar cientificamente os resultados encontrados e servir apropriadamente como contraprova aos resultados numéricos.

As equações analíticas usadas para essa simulação foram desenvolvidas a partir das equações governantes de movimento 4.1 e 4.2 para um grau de liberdade e um modo de vibração. Os coeficientes dessas 2 equações, assim como as próprias equações de movimento, são desenvolvidos com base em aproximações pelo método de energia e a partir da forma generalizada do Princípio de Hamilton para um sistema eletromecânico. Para isso foi desconsiderado o termo magnético e definida as energias cinética ( $T_k$ ), potencial interna ( $U$ ), elétrica ( $W_e$ ) e o trabalho externo ( $W$ ), como apresentado por Du Toit, 2005 e mostrado abaixo:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T_k - U + W_e) + \delta W] dt = 0 \quad (4.4)$$

O termo  $\delta$  indica a primeira variação da função.

Através de aproximações utilizando Cálculo das Variações e também de três hipóteses conceituais, que são o procedimento de Raleigh-Ritz, a Teoria das vigas de Euler-Bernoulli e o campo elétrico constante através do elemento piezelétrico, é possível chegar aos coeficientes das equações governantes:

$$M = \int_0^L m \psi_r^2 dx_a + M_0 (\psi_r(L))^2 + 2S_0 \psi_r(L) \psi_r'(L) + I_0 (\psi_r'(L))^2 \quad (4.5)$$

$$K = M \omega_n^2 \quad (4.6)$$

$$\theta = \int -x_t \psi_r'' e_{31} (-\nabla \psi_v) dV \quad (4.7)$$

$$C_p = \int (-\nabla \psi_v) \epsilon_{33}^s (-\nabla \psi_v) dV \quad (4.8)$$

$$B_f = \int_0^L m \psi_r dx_a + M_0 \psi_r(L) + S_0 \psi_r'(L) \quad (4.9)$$

A variável  $m$  é definida como a razão de massa por comprimento da placa na seção transversal,  $\psi_r(x)$  como o vetor do modo de vibração mecânico,  $M_0$  como o momento estático

na junção  $x=L$ ,  $L$  como o comprimento da placa até o momento de junção com a massa de prova,  $e_{31}$  a constante de tensão,  $\psi_v(x)$  como o vetor do modo de vibração elétrico,  $\varepsilon_{33}^S$  a constante piezolétrica que relaciona densidade de carga e tensão e  $S_0$  como o momento de inércia na junção.

Todos os termos são aplicáveis para os casos com uma massa de prova no final da barra e para um sistema sem massa de prova.

Levando em conta que a frequência natural do sistema  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$  e a taxa de amortecimento  $\zeta_m = \frac{C}{2M\omega_n}$ , se obtém as equações 4.10 e 4.11:

$$\ddot{z} + 2\zeta_m\omega_n\dot{z} + \omega_n^2z - \frac{\theta v}{M} = \frac{-B_f\ddot{w}_B}{M} \quad (4.10)$$

$$\theta\dot{z} + C_p\dot{v} + \frac{1}{R_l}v = 0 \quad (4.11)$$

A partir das equações, foram encontrados os valores dimensionais de deslocamento, tensão e potência extraída ( $P_{out} = \frac{v^2}{R_l}$ ), contemplados no apêndice A. Foi utilizado para fins de cálculo, o teorema de Laplace nas equações 4.10 e 4.11, alterando assim os termos da base do tempo para a base da frequência e se tornando mais fácil os cálculos. Dessas expressões, alguns fatores adimensionais foram definidos, como  $\alpha = \omega_n R_l C_p$  sendo a constante adimensional do tempo,  $\kappa^2 = \frac{\theta^2}{K C_p}$  para o acoplamento do sistema e  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$  para a adimensionalização da relação de frequência. Conforme apresentado no apêndice A, as seguintes equações adimensionais podem ser obtidas:

$$\left| \frac{z}{B_f\ddot{w}_B} \right| = \frac{1}{K} \frac{\sqrt{1+(\alpha\Omega)^2}}{\sqrt{[(1-\Omega^2)-2\zeta_m\alpha\Omega^2]^2 + [(\{1+\kappa^2\}-\Omega^2)\alpha\Omega + 2\zeta_m\Omega]^2}} \quad (4.12)$$

$$\left| \frac{v}{B_f\ddot{w}_B} \right| = \frac{1}{|\theta|} \frac{\alpha\kappa^2\Omega}{\sqrt{[(1-\Omega^2)-2\zeta_m\alpha\Omega^2]^2 + [(\{1+\kappa^2\}-\Omega^2)\alpha\Omega + 2\zeta_m\Omega]^2}} \quad (4.13)$$

$$\left| \frac{P_{out}}{(B_f\ddot{w}_B)^2} \right| = \frac{\omega_n}{K} \frac{\alpha\kappa^2\Omega^2}{[(1-\Omega^2)-2\zeta_m\alpha\Omega^2]^2 + [(\{1+\kappa^2\}-\Omega^2)\alpha\Omega + 2\zeta_m\Omega]^2} \quad (4.14)$$

Essas equações utilizadas tanto para a resolução por um método numérico (4.1, 4.2), quanto às utilizadas para a resolução pelo método analítico (4.12, 4.13, 4.14) contêm parâmetros que definem algumas características do modelo em questão, como massa, resistência,

acoplamento eletromecânico, etc. Neste trabalho consideram-se os valores definidos por Kim et al. (2010) para estes parâmetros, os quais se encontram listados na Tabela 2. Esses valores são utilizados para as análises apresentadas neste capítulo e no capítulo 5. Além disso, serão analisadas três condições do modelo: sem massa de prova (Sem MP), com massa de prova I (MP I) e com massa de prova II (MP II).

**Tabela 2:** Parâmetros utilizados para os três casos estudados (KIM et al., 2010).

|        | $\ddot{w}_B$ (m s <sup>-2</sup> ) | M (Kg)  | K (N m <sup>-1</sup> ) | $\Theta$ (N V <sup>-1</sup> ) | C <sub>p</sub> ( $\times 10^{-8}$ F) | B <sub>r</sub> | k <sup>2</sup> | $\Psi_r$ | $\zeta_m$ | f (Hz) |
|--------|-----------------------------------|---------|------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|----------------|----------------|----------|-----------|--------|
| Sem MP | 2,5                               | 0,00878 | 4.150                  | -0,004688                     | 4,194                                | 0,006872       | 0,1262         | 2        | 0,0182    | 109,5  |
| MP I   | 0,5                               | 0,114   | 7.760                  | -0,006653                     | 4,202                                | 0,04958        | 0,1367         | 2,767    | 0,0154    | 41,63  |
| MP II  | 0,2                               | 0,414   | 19.900                 | -0,009614                     | 4,210                                | 0,1264         | 0,1110         | 4,301    | 0,0146    | 34,75  |

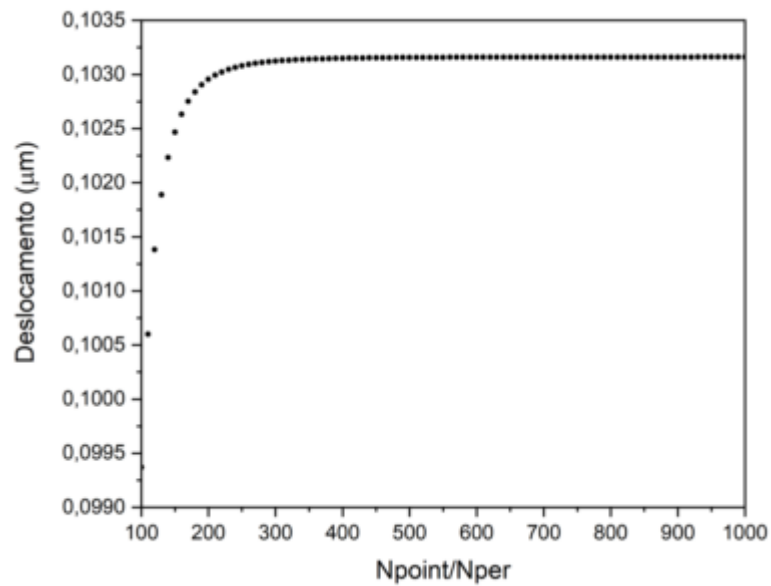
### 4.3. Metodologia Numérica

O modelo numérico foi desenvolvido utilizando o pacote computacional MatLab, sendo que as equações diferenciais 4.1 e 4.2 foram integradas numericamente com o uso de um integrador Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> ordem, também desenvolvido no presente projeto.

#### 4.3.1. Análise de Convergência

Para garantir que o modelo vá gerar resultados confiáveis, primeiramente foi feita uma análise de convergência do modelo. Escolheu-se o caso sem massa de prova, para uma frequência de excitação baixa de 10 Hz, uma resistência de 20 K $\Omega$ , e foi realizado um estudo de convergência com somente um período. Os valores utilizados, para cada parâmetro, foram os apresentados na Tabela 2.

Mantendo todos os parâmetros e somente variando o número de pontos por períodos pode-se observar que a partir de 500 pontos os valores de deslocamento máximo já não apresentam variações (Figura 20). Então, todos os estudos realizados foram feitos com 500 pontos por períodos. Na figura Nper é o número de períodos e Npoint é o número de pontos por período.

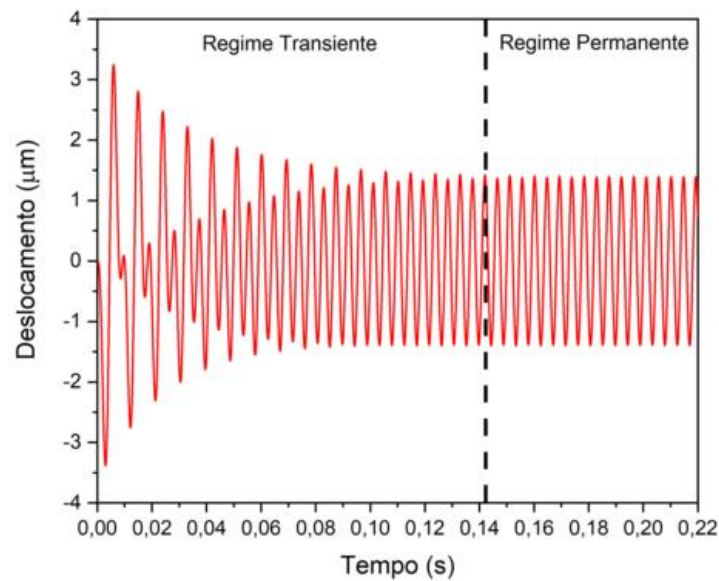


**Figura 20:** Análise de convergência.

#### 4.3.2. Análise do número ideal de períodos

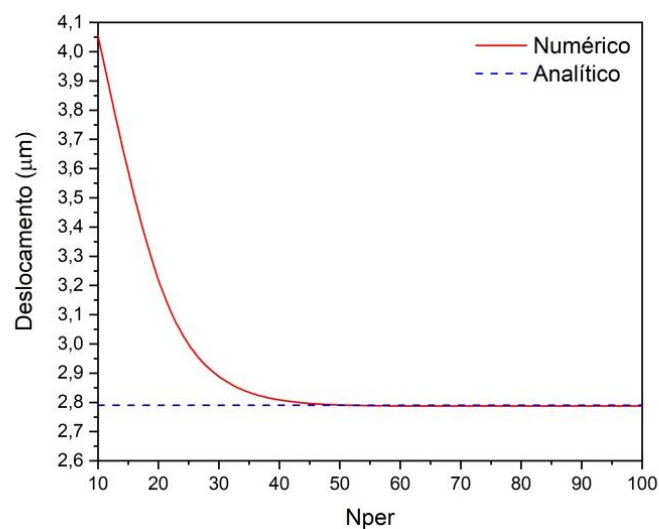
Verificou-se que a altas frequências de excitação, os valores retornados pela programação para o método numérico apresentavam uma diferença de 60% em relação ao método analítico. Isso ocorria por conta do método analítico apresentar somente o regime permanente, enquanto o método numérico, nos seus primeiros períodos, apresentar um regime transiente. Então após a realização da análise de convergência, foi feito um estudo para averiguar a quantidade mínima de períodos para que, a qualquer frequência, os resultados gerados, pelo método numérico, estivessem dentro do regime permanente.

Ao aumentar o número de períodos, utilizando a mesma frequência de excitação e mantendo o número de pontos por período 500, se pode confirmar que a maiores frequências é necessário um maior número de períodos, para que se encontrem resultados no regime permanente. Esse caso se encontra ilustrado na Figura 21.



**Figura 21:** Comparação entre os deslocamentos gerados pelo método numérico em um mesmo intervalo de tempo (220 Hz; 20 KΩ; Nper = 50; Npoint = 500).

Partindo então da necessidade de se ter um número de períodos suficiente para gerar respostas fora do regime transiente, foi feito um estudo relacionando as respostas de deslocamento máximo, encontradas no último período gerado, com o número de períodos. O estudo foi feito para um sistema sem adição de massa de prova, com a maior frequência utilizada no trabalho (220 Hz) e mantendo a quantidade de 500 pontos por período. Obteve-se como resultado a Figura 22, que mostra que a partir de 50 períodos, não se tem mais uma grande diferença entre os resultados esperados.



**Figura 22:** Comparação entre os deslocamentos gerados pelos modelos analítico e numérico variando o número de períodos.



## Capítulo 5

### 5. Resultados

Este capítulo tem como objetivo mostrar, primeiramente, como o modelo numérico foi validado, através da sua comparação com dados obtidos por Kim et al. (2010). Nesta seção também serão mostrados os resultados dos modelos numérico e analítico, obtidos através de uma programação desenvolvida no software Matlab, a fim de se obter uma comparação entre os dois métodos. E por fim o modelo numérico será explorado através da variação de parâmetros como resistência, massa de prova e acoplamento eletromecânico.

Após os estudos de convergência e número de períodos, foram colocados como valores fixos o número de períodos 50 e de pontos por período 500. Todas as análises foram feitas com os dados presentes na Tabela 2.

Para os casos sem a utilização de massa de prova, os valores, pertencentes à primeira linha da tabela, foram nomeados como “Sem MP”, e para os casos com massa de prova “MP I” e “MP II”. Os valores de variáveis como resistência e frequência foram variados ao longo do trabalho para realizar as comparações e análises citadas.

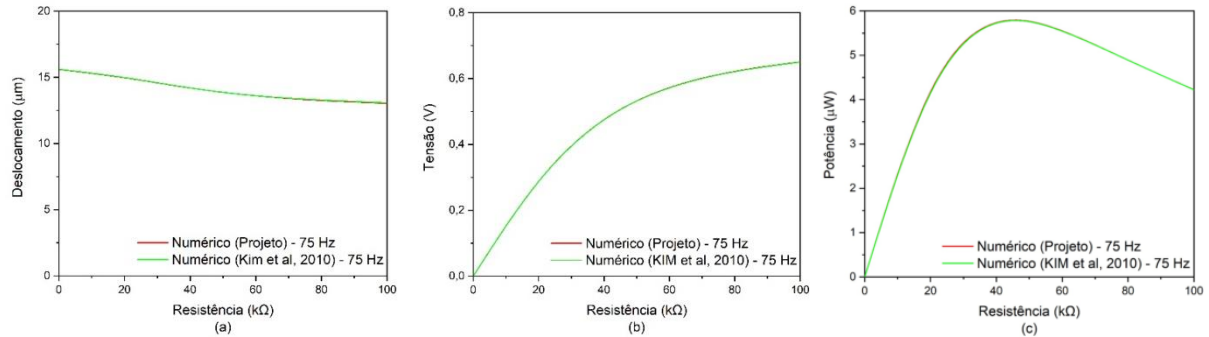
#### 5.1. Validação do Modelo Numérico desenvolvido

Esta primeira etapa do projeto teve como objetivo testar o modelo desenvolvido, comparando-o aos resultados encontrados pelo modelo apresentado por Kim et al. (2010). A escolha do modelo se deve ao fato deste ter sido previamente comparado com dados experimentais.

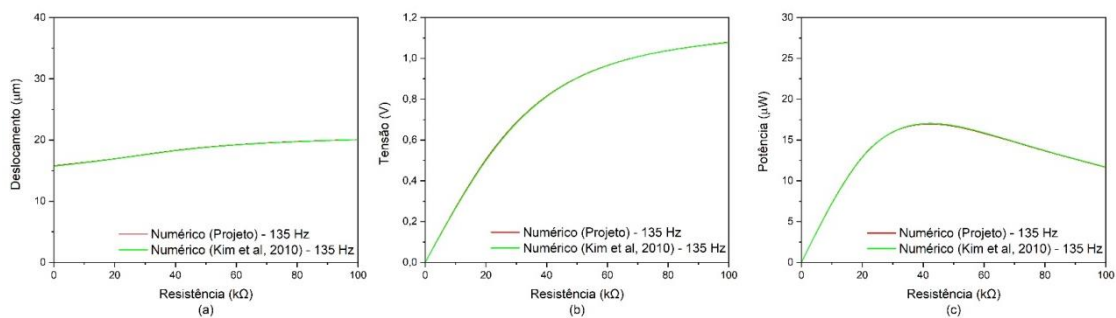
Foram analisados diversos tipos de cenários. Primeiramente foi estudado o caso para um sistema sem uma massa de prova, variando os valores de resistência de 0 até 100 k $\Omega$  e fixando as frequências em 75 Hz, 109.5 Hz (Ressonância) e 135 Hz. Estas frequências foram escolhidas para que se tivesse uma comparação entre as respostas do deslocamento, da tensão elétrica e da potência encontrada, antes, durante e depois da frequência de ressonância.

Para frequências de excitação abaixo e acima da frequência de ressonância foi encontrada uma exatidão de resultados com 0,3% de erro. Pode-se observar nas Figuras 23 e

24 que as curvas referentes aos resultados dos 2 modelos se sobrepõem, indicando uma boa concordância.

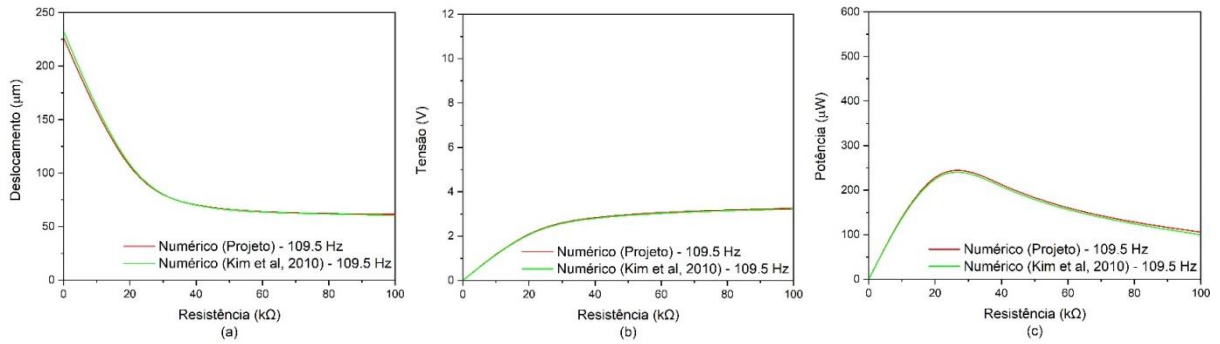


**Figura 23:** Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) gerada pelo sistema sem massa de prova, para uma frequência de 75 Hz.



**Figura 24:** Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema sem massa de prova, para uma frequência de 135 Hz.

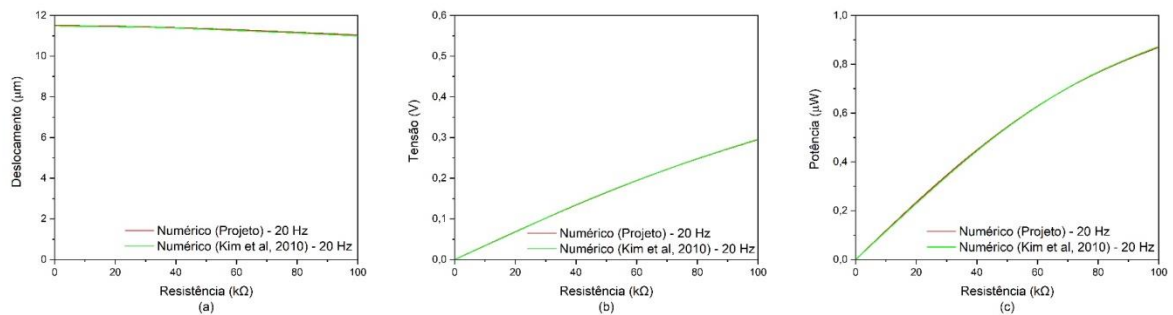
Para a frequência de excitação igual à frequência de ressonância, foi encontrada uma exatidão de resultados com erro de 2%. Pode-se observar nos gráficos apresentados na Figura 25, que os resultados entre os modelos não se sobrepõem totalmente, aparecendo então, tanto a curva do modelo numérico do projeto, quanto a curva do modelo numérico apresentado por Kim et al. (2010).



**Figura 25:** Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema sem massa de prova, para uma frequência de 109.5 Hz.

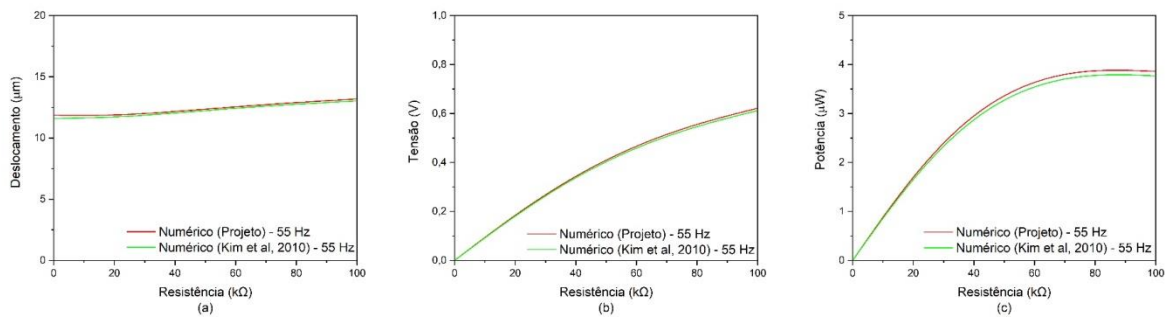
Em seguida foram analisadas as mesmas relações, porém contemplando um sistema com a massa de prova I. As frequências consideradas para o estudo foram 20 Hz, 41.625 Hz (ressonância) e 55 Hz, novamente testando valores antes, durante e após a ressonância.

Como no primeiro caso, para uma frequência de excitação abaixo da frequência de ressonância, foi encontrada uma boa concordância entre os resultados, com erro na faixa de 0,4% (Figura 26).

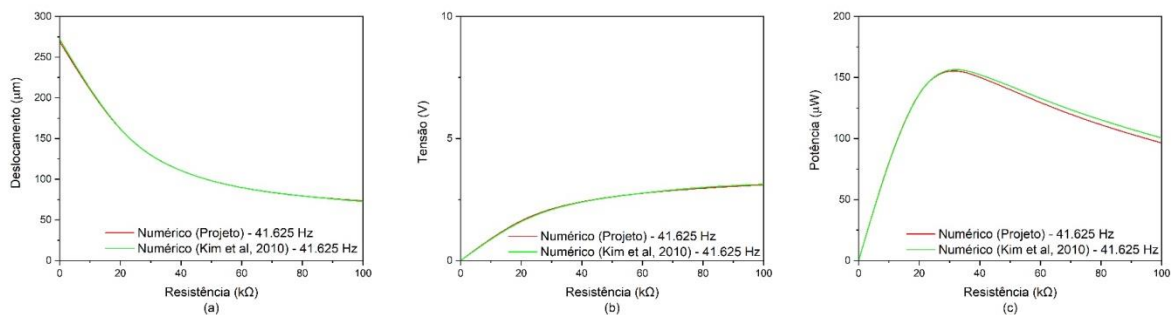


**Figura 26:** Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova I, para uma frequência de 20 Hz.

Para os casos onde a frequência de excitação é igual ou está acima da frequência de ressonância foi encontrado um erro de 2% (Figuras 27 e 28).



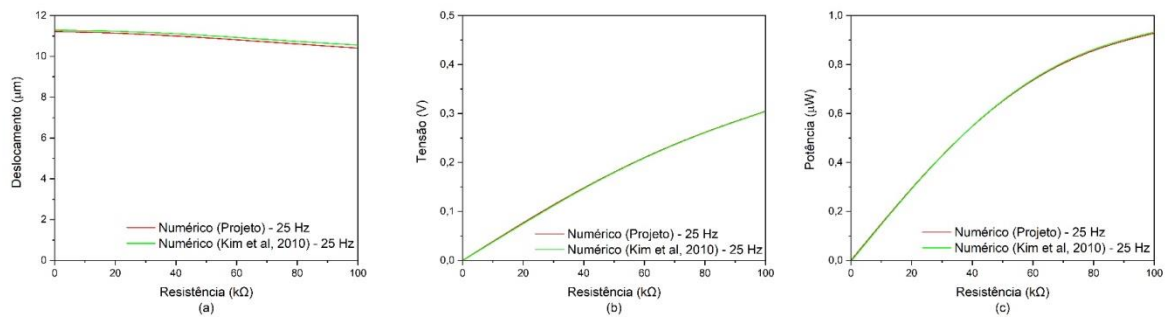
**Figura 27:** Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova I, para uma frequência de 55 Hz.



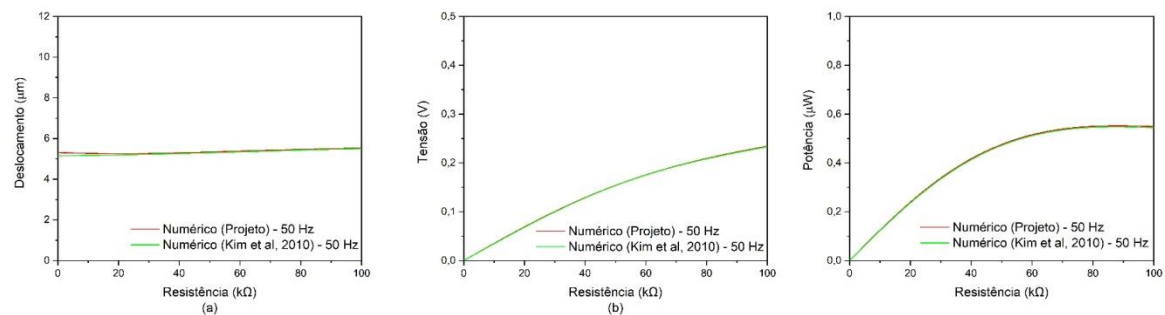
**Figura 28:** Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova I, para uma frequência de 41.625 Hz.

Finalmente, foram comparados os resultados obtidos para um sistema com a massa de prova II, também variando os valores de resistência de 0 até 100 k $\Omega$  e as frequências antes, durante e depois da ressonância, com valores de 25 Hz e 34.75 Hz (ressonância) e 50 Hz.

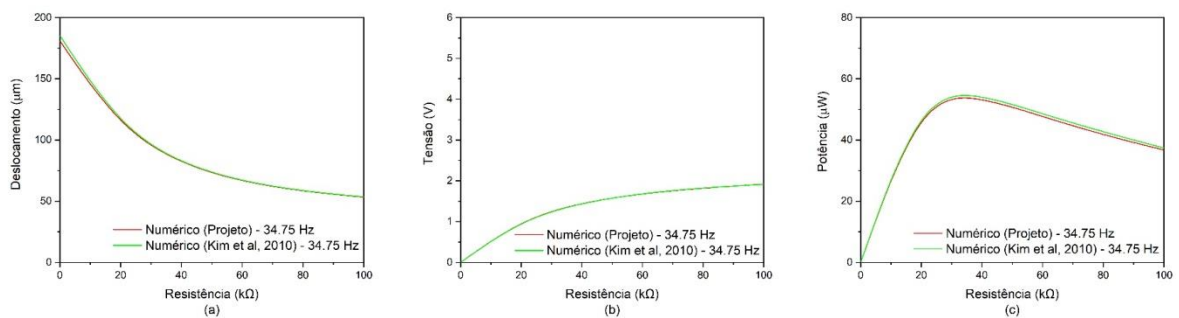
Da mesma forma como se deu o caso do sistema sem massa, os resultados obtidos com frequências de excitação antes e depois da ressonância tiveram seu erro em 1% (Figuras 29 e 31), e os obtidos na frequência de ressonância apresentaram 3% de variação (Figura 30).



**Figura 29:** Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova II, para uma frequência de 25 Hz.



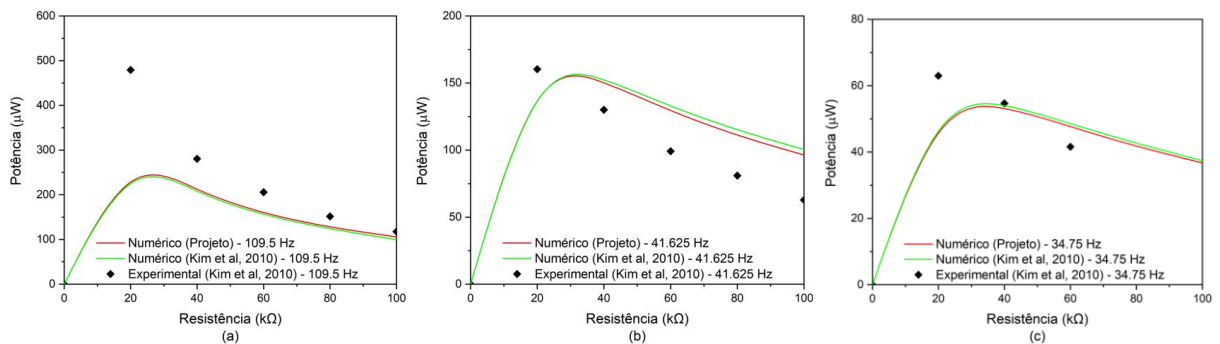
**Figura 30:** Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova II, para uma frequência de 50 Hz.



**Figura 31:** Deslocamento (a), Tensão Elétrica (b) e Potência (c) gerada pelo sistema com a massa de prova II, para uma frequência de 34.75 Hz.

Foi constatado que em todos os casos explorados, tanto sem massa de prova quanto com a adição das massas de prova I e II, os resultados obtidos apresentaram uma boa concordância entre as respostas dos dois modelos numéricos. Dessa forma, os resultados indicam que o modelo desenvolvido pode ser utilizado como ferramenta de análise para explorar outras condições de trabalho.

Para todos os casos estudados, as maiores discrepâncias entre os modelos foram encontradas para as comparações na frequência de ressonância. Para obter uma comparação mais acertiva, foi feita a análise dos resultados do método numérico do trabalho com os resultados experimentais encontrados por Kim et al. (2010). Essa comparação foi feita para os três casos somente na frequência de ressonância e para os resultados de potência, pois foi onde o autor, na maior parte dos casos, encontrou as maiores diferenças entre os seus resultados numéricos e experimentais (Figura 32).



**Figura 32:** Potência gerada pelo sistema (a) Sem massa de prova; (b) Com a massa de prova 1; (c) Com a massa de prova 2.

Reparou-se, que para alguns casos, as respostas numéricas encontradas no presente trabalho se aproximaram mais das respostas experimentais do que as próprias respostas numéricas obtidas por Kim et al. (2010).

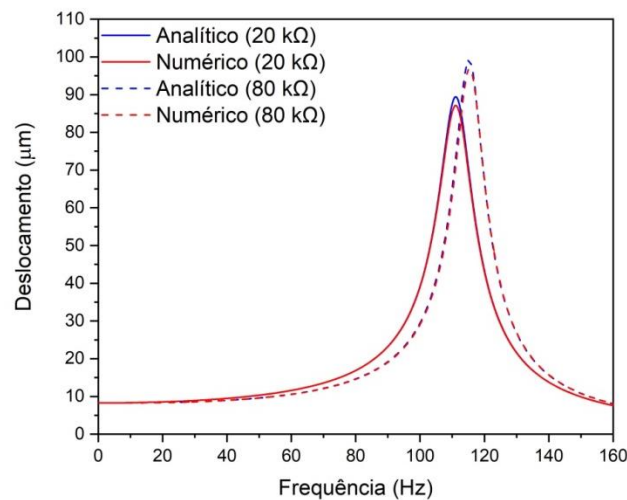
Para o primeiro caso (Figura 32(a)), a discrepância entre os resultado numérico do trabalho e experimental foi 5,1% menor do que a discrepância encontrada entre o método numérico e experimental de Kim et al. (2010). O mesmo acontece para o caso (Figura 32(b)), porém sendo 6,4% menor. Para o caso (Figura 32(c)), chegou a ser 2% menor. Estes resultados calculados podem ser vistos facilmente olhando os gráficos.

A partir dos resultados apresentados, observa-se que para qualquer um dos casos, nas frequências de ressonância testadas são obtidos, como esperado, os maiores valores de potência. Também é possível notar que os valores de ressonância se tornam menores à medida em que a massa do sistema aumenta. Esta é uma importante característica para explicar a vantagem da adição de uma massa de prova em um sistema de colheita de energia, pois valores de frequência menores são mais fáceis de serem alcançados num ambiente real. A influência da massa de prova será melhor explorada no item 5.3 deste capítulo.

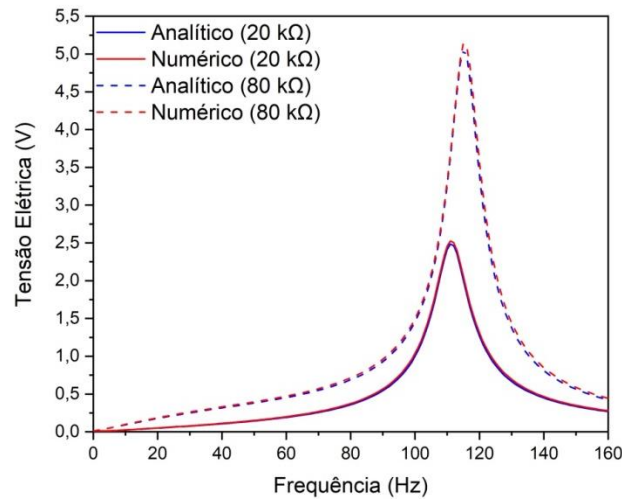
## 5.2. Resultados Numéricos e Analíticos para um Sistema Piezelétrico Linear

Após a validação do modelo numérico desenvolvido, neste item avalia-se as diferenças entre os modelos numérico e analítico para as configurações apresentadas no capítulo anterior: uma viga piezelétrica excitada harmonicamente por um Shaker Mecânico oscilando em uma faixa e frequência previamente determinada, com e sem a introdução de uma massa de prova.

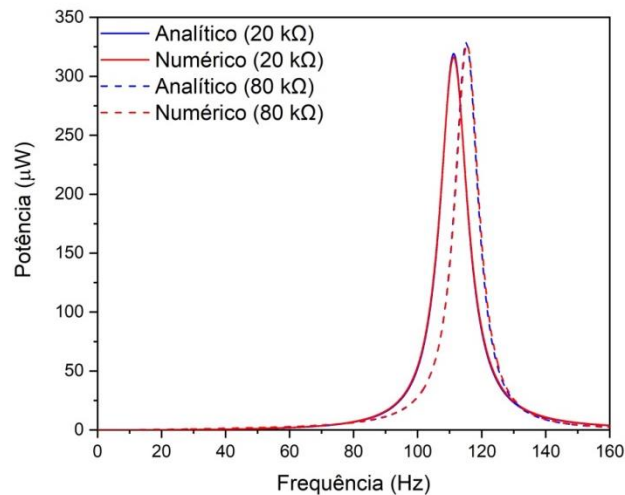
Foram realizados diversos testes para diferentes valores de frequência mantendo-se a resistência fixa para os três casos mencionados (sem massa de prova, e com as massas I e II). No primeiro momento foi observado o comportamento do sistema sem massa de prova, com uma varredura de frequência para os valores de 0 a 160 Hz, e com uma varredura de resistência de 10 a 100 k $\Omega$ . Contudo, para ilustrar o comportamento do sistema nos modelos tratados foram selecionados somente uma parte desses resultados. Nas Figuras 33, 34 e 35, são apresentados os resultados de deslocamento, tensão elétrica e potência gerada pelo sistema, para 20 e 80 k $\Omega$ .



**Figura 33:** Deslocamento gerado pelo sistema sem massa de prova.



**Figura 34:** Tensão Elétrica gerada pelo sistema sem massa de prova.



**Figura 35:** Potência gerada pelo sistema sem massa de prova.

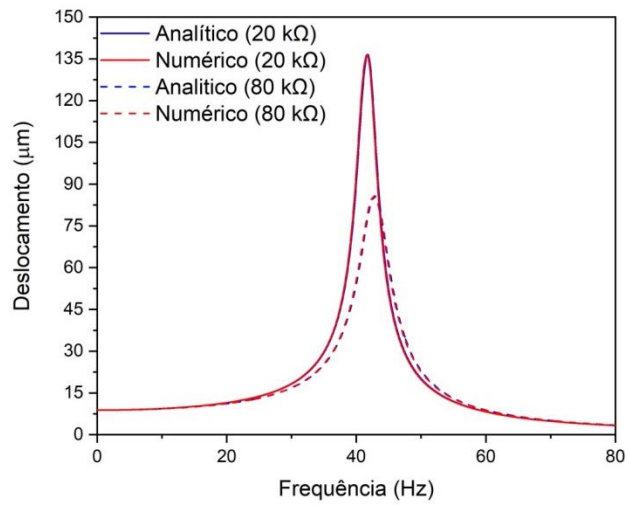
Neste caso, as frequências de ressonância e antirressonância são, respectivamente, 109,5 e 115,25 Hz. Pode-se perceber que quando ocorre alguma diferença entre os métodos, ocorrem a essas frequências.

Ainda estudando esta faixa próxima da ressonância, para o caso da resistência de 80 kΩ, as curvas de resposta de potência se deslocam um pouco para a direita em relação aos resultados gerados com resistência de 20 kΩ, porém se comparados os valores máximos de potências, a produzida quando a resistência é 80 kΩ é somente 2% superior que a produzida quando a resistência é 20 kΩ.

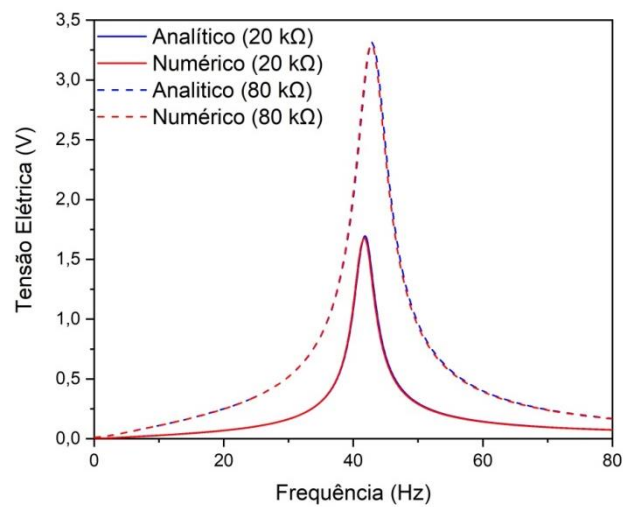
Da mesma forma em que foi realizada a primeira análise, foi feito um estudo para o sistema com a massa de prova I, com uma variação de frequência entre os valores de 0 a 80 Hz.



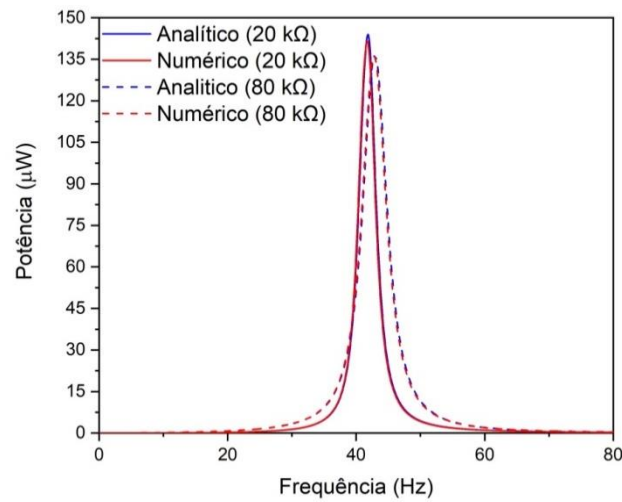
Nas Figuras 36, 37 e 38 são apresentados os resultados de deslocamento, tensão elétrica e potência gerados pelo sistema, também para 20 e 80 k $\Omega$ .



**Figura 36:** Deslocamento gerado pelo sistema com a massa de prova I.



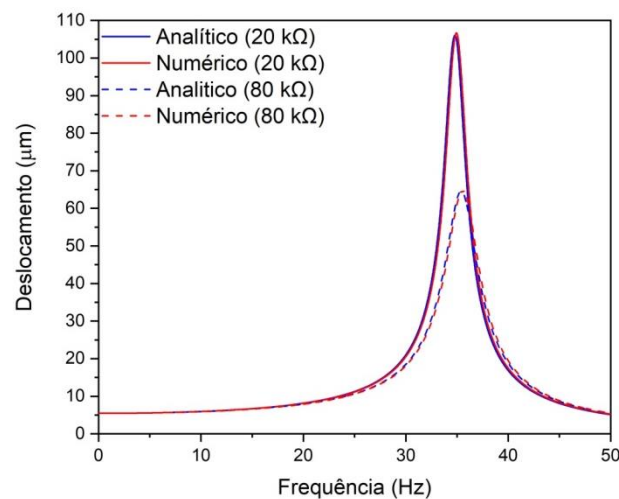
**Figura 37:** Tensão Elétrica gerada pelo sistema com a massa de prova I.



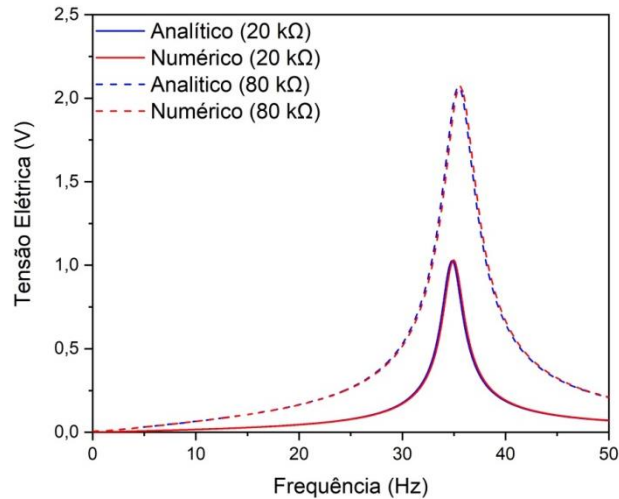
**Figura 38:** Potência gerada pelo sistema com a massa de prova I.

No caso do sistema com a primeira massa de prova, pode-se observar que para o caso da resistência de 80 k $\Omega$  as curvas de respostas de potência continuam se deslocando um pouco para a direita e apresentam uma potência menor em 12% em relação aos resultados gerados com resistência de 20 k $\Omega$ .

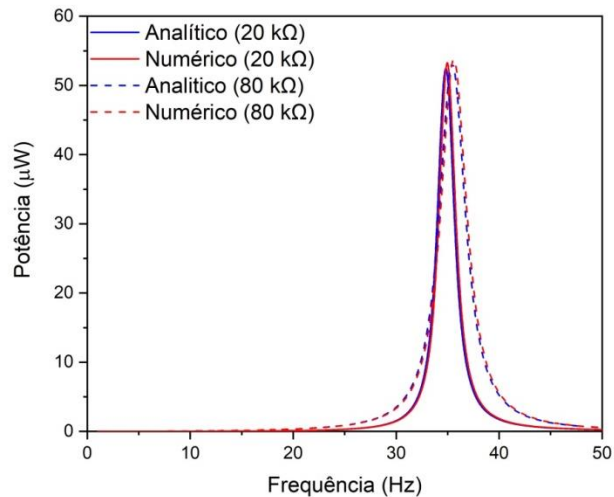
Por ultimo foi realizado um estudo para o sistema com a massa de prova II, com uma variação de frequência para os valores de 0 a 50 Hz, e mesmos valores de resistência dos casos anteriores. Nas Figuras 39, 40 e 41 são apresentados os resultados de deslocamento, tensão elétrica e potência gerados pelo sistema.



**Figura 39:** Deslocamento gerado pelo sistema com a massa de prova II.



**Figura 40:** Tensão Elétrica gerada pelo sistema com a massa de prova II



**Figura 41:** Potência gerada pelo sistema com a massa de prova II.

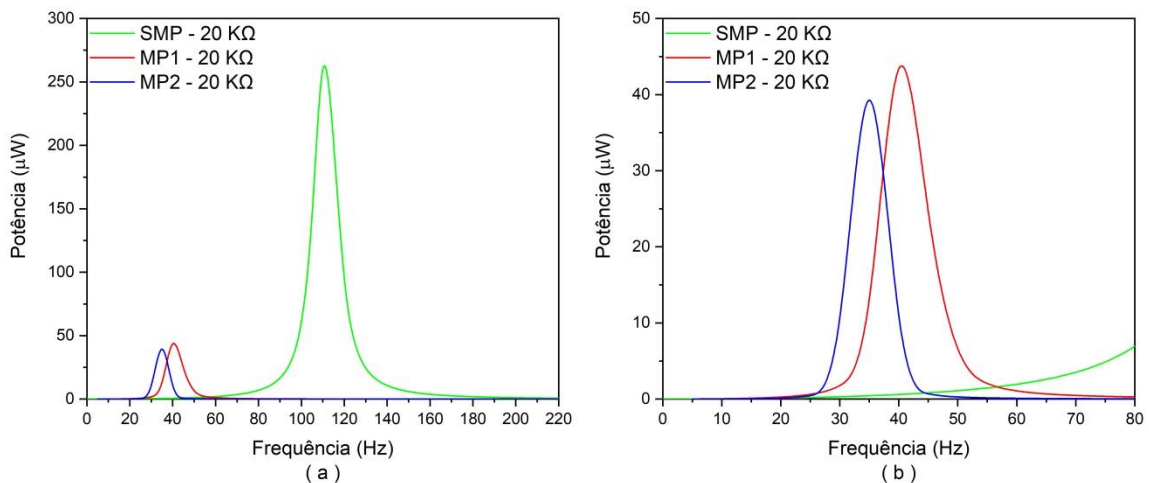
No caso do sistema com a segunda massa de prova, pode-se observar que não existe uma grande discrepância entre os resultados de potência com 20 e 80 k $\Omega$ , quando analisada a diferença percentual entre os resultados encontra-se 0,02%.

Pode-se perceber que em todos os casos os resultados encontrados pelos modelos numéricos e analíticos foram muito próximos a qualquer frequência e resistência utilizada. A diferença entre os dois modelos se dá somente do período inicial do sistema, onde o modelo analítico não apresenta um período transiente, enquanto o numérico apresenta. Portanto, se os resultados fossem obtidos dos períodos iniciais, haveria uma maior discrepância nos resultados.

### 5.3. Estudo da influência de adição de massas de prova para um Sistema Piezelétrico Linear

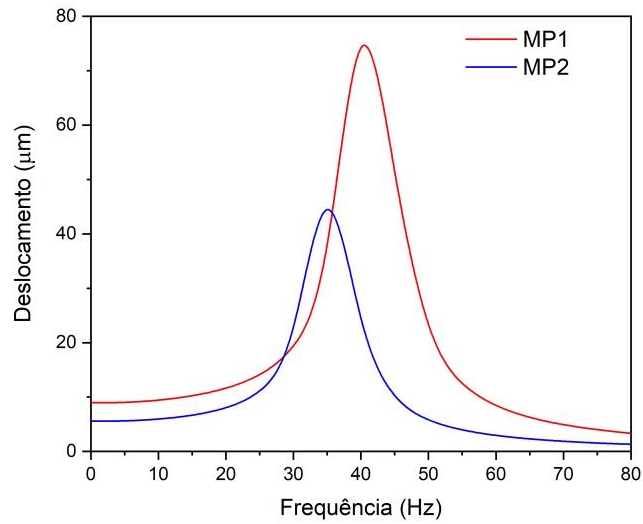
Após as comparações entre os modelos, foi feito um estudo utilizando somente o modelo numérico para verificar as respostas de tensão elétrica e potência quando adicionada uma massa de prova no sistema.

Para esse estudo foi fixada uma resistência de  $20\text{ k}\Omega$  para observar a influência da massa nas respostas elétricas para cada valor de frequência. Na Figura 42 pode-se observar que ao adicionar uma massa as frequências de ressonância se tornam menores, isso faz com que a menores frequências de excitação obtenha-se uma maior resposta de potência.



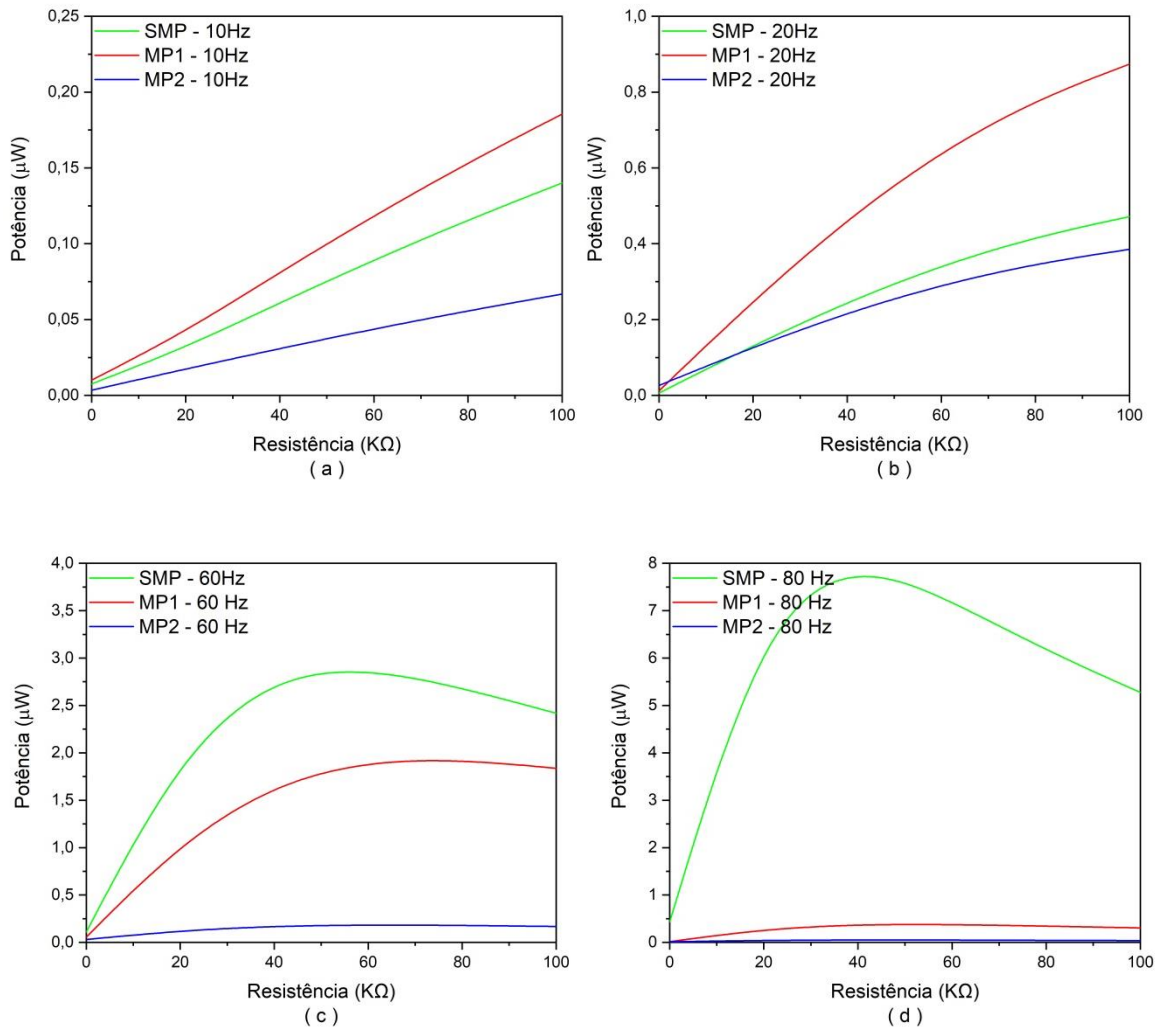
**Figura 42:** Potência x frequência para os sistemas com e sem massas de prova.

Também é possível perceber que ao aumentar a massa de prova não necessariamente obtém-se um maior resultado de potência. Isso sugere que ao mesmo tempo que o aumento da massa reduz a frequência de ressonância do modelo ela reduz a amplitude do seu deslocamento. Na Figura 43 mostra este comportamento já que a massa de prova II restringe o movimento da viga piezelétrica gerando menores deslocamentos, e assim menores tensões elétricas.



**Figura 43:** Deslocamento x Frequência para os sistemas com massas de prova I e II.

Com o objetivo de alcançar maiores potências a menores frequências, foram verificados diferentes casos para valores baixos de frequência antes (10 e 20 Hz) e depois (60 e 80 Hz) dos valores de ressonância dos modelos com massa (Figura 44).



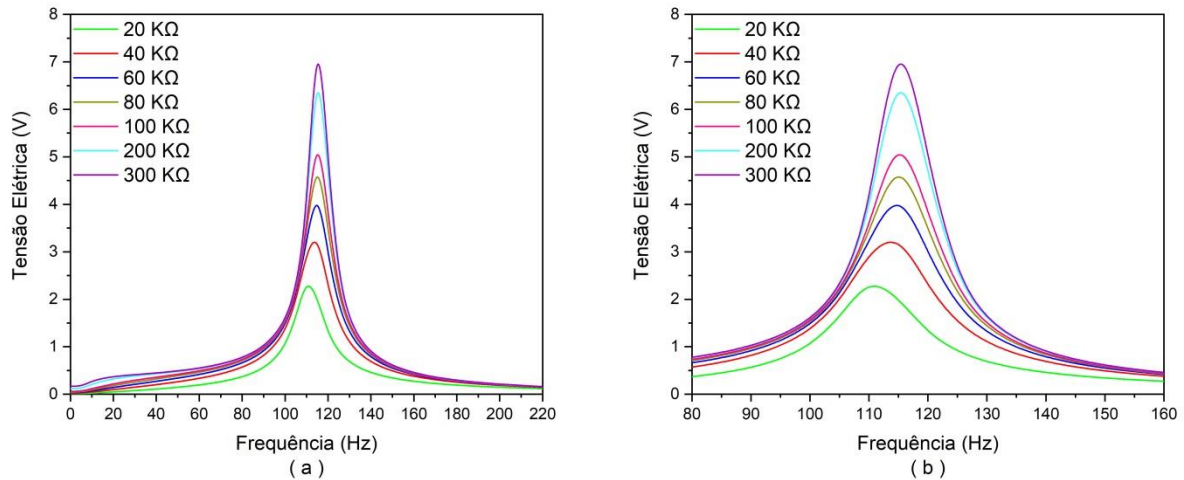
**Figura 44:** Potência x Resistência para os sistemas com e sem massa de prova.

Pode-se observar que para as frequências de excitação abaixo da frequência de ressonância (Figura 44(a) e (b)) o sistema com massa de prova I alcançou maiores resultados de potência, não importando a qual valor de resistência. Já para as frequências acima da ressonância (Figura 44(c) e (d)), o sistema sem massa de prova alcançou melhores resultados, já que o sistema se aproxima da sua frequência de ressonância.

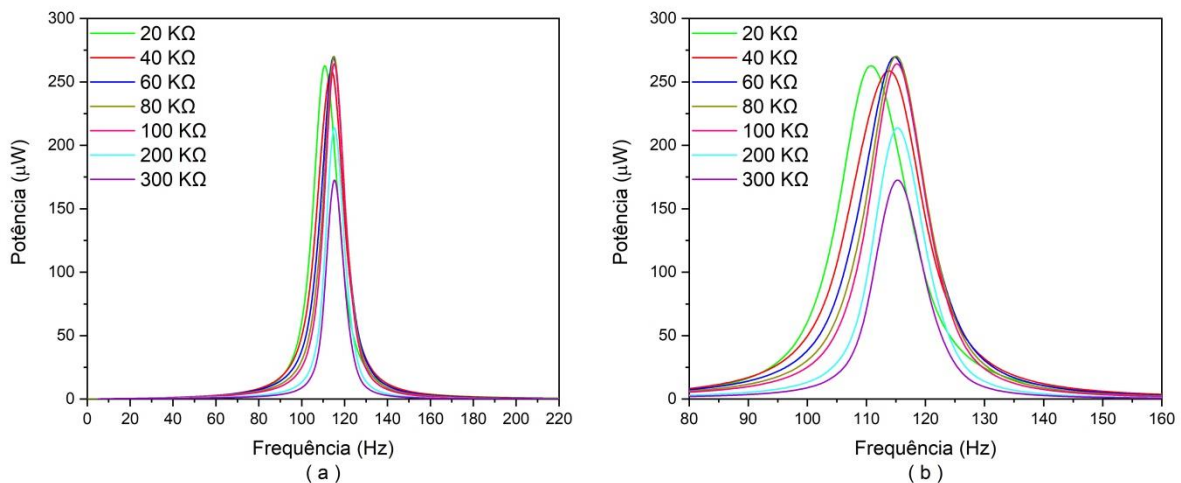
#### 5.4. Estudo da influência da Resistência para um Sistema Piezelétrico Linear

Após o estudo da influência da massa no sistema foi feita uma análise para verificar o quanto os valores de potência variam em relação a uma mudança na resistência do sistema. Os estudos foram realizados para os dois melhores casos da seção anterior: sem massa de prova e com a massa de prova I.

No primeiro caso, um sistema sem massa de prova, foram geradas diversas resposta de tensão elétrica (Figura 45) e potência (Figura 46) para diferentes valores de frequência e resistência.



**Figura 45:** Tensão Elétrica x frequência para o sistema sem massa de prova.



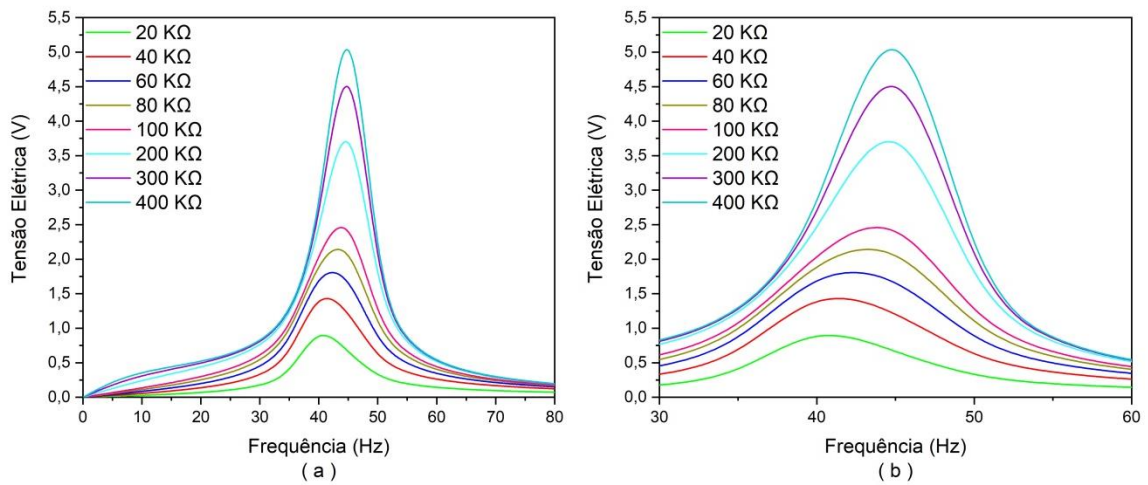
**Figura 46:** Potência x frequência para o sistema sem massa de prova.

Quando comparados os valores gerados de tensão elétrica e potência para diferentes valores de resistência, percebe-se que o aumento da resistência provoca um aumento considerável de tensão elétrica, por exemplo, entre os valores de resistência de 40 kΩ e 100 kΩ houve um aumento em 92%. Em contrapartida, quando se analisa os resultados de potência, o aumento foi somente de 43%.

É possível ver que esses valores máximos de potência variam ao utilizar diferentes resistores, isso ocorre por conta do acoplamento entre as equações diferenciais, mecânica e

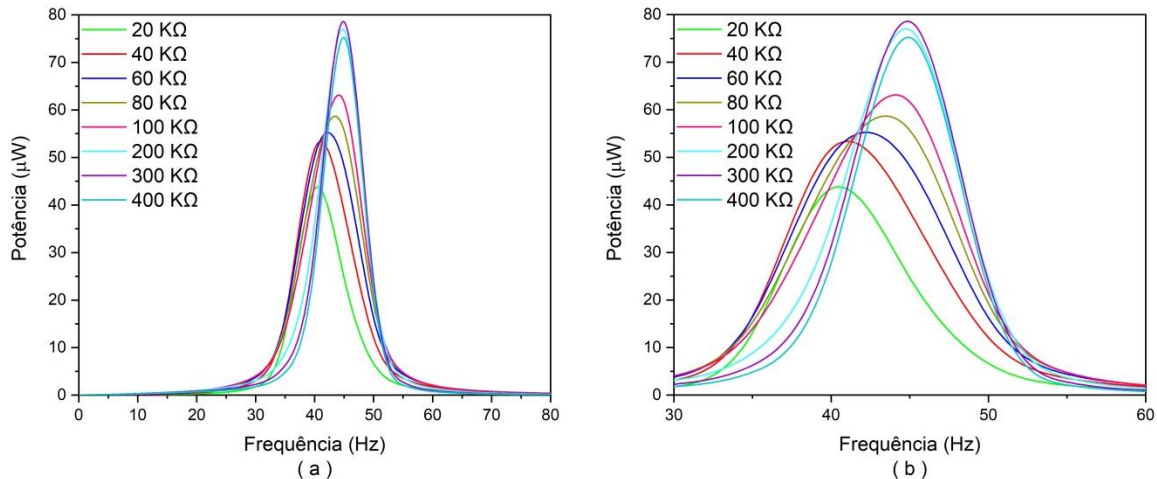
elétrica, apresentadas no capítulo da metodologia utiliza (4.1 e 4.2). Outro fator que se torna evidente é a mudança da frequência de ressonância do sistema na medida em que o valor da resistência aumenta, porém após um certo valor, neste caso 80 K $\Omega$ , essa frequência de ressonância permanece constante em 115 Hz.

Comportamento semelhante pode ser observado com o sistema com adição de uma massa de prova (Figuras 47 e 48). Neste sistema a tensão elétrica aumenta com o aumento dos valores de resistência, assim como suas frequências de ressonância. Assim como no caso sem uma massa de prova, as frequências de ressonância permanecem as mesmas, em 45Hz, ao passar de um certo valor de resistência, neste caso 200 K $\Omega$ . Também se observa que, na maior parte das vezes, os valores de potência são maiores na medida em que a tensão elétrica gerada é maior, porém esses valores de potência gerada não necessariamente crescem com a mesma proporção da tensão elétrica. Se comparados os valores gerados a 40, 60 e 80 k $\Omega$ , a tensão aumenta em 16%, em relação a 40 e 60 k $\Omega$ , e 24%, em relação a 60 e 80 k $\Omega$ , já a potência só aumenta em 6%, em relação a 40 e 60 k $\Omega$ , e 15%, em relação a 60 e 80 k $\Omega$ .



**Figura 47:** Tensão Elétrica x frequência para o sistema com a massa de prova I.





**Figura 48:** Potência x frequência para o sistema com a massa de prova I.

Foi verificado no caso do sistema com massa que a partir de 400 k $\Omega$  a potência gerada se torna menor do que as obtidas para valores de resistências de 300 e 200 k $\Omega$ . O fato da potência gerada não seguir um padrão de crescimento como é o caso da tensão elétrica gerada, se explica pela relação  $P_{out} = \frac{v^2}{R}$ , ou seja, com o aumento da resistência consegue-se gerar maiores tensões elétricas, porém nem sempre essa relação é capaz de gerar maiores potências.

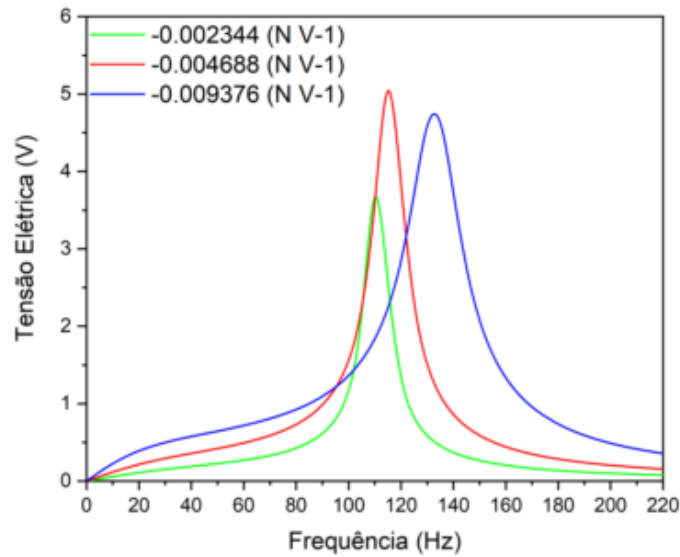
## 5.5. Estudo da influência do acoplamento eletromecânico para um Sistema Piezelétrico Linear

A fim de investigar mais uma variável presente no modelo estudado, foi realizado um estudo para avaliar a influência do acoplamento eletromecânico. O coeficiente de acoplamento representa a eficiência do material em relação à conversão de energia de vibração em energia elétrica e vice versa. Essa informação é importante, pois é ela que vai determinar se o sistema vai ou não gerar cargas elétricas, e qual a magnitude destas cargas (DROESCHER, 2009).

O estudo foi realizado para todos os casos, porém pela similaridade nos resultados somente será mostrado para um sistema sem massa de prova. Além disso, os estudos foram feitos utilizando resistências distintas, porém, também por não apresentar grandes variações, somente serão mostrados os resultados encontrados com a resistência de 20 k $\Omega$ .

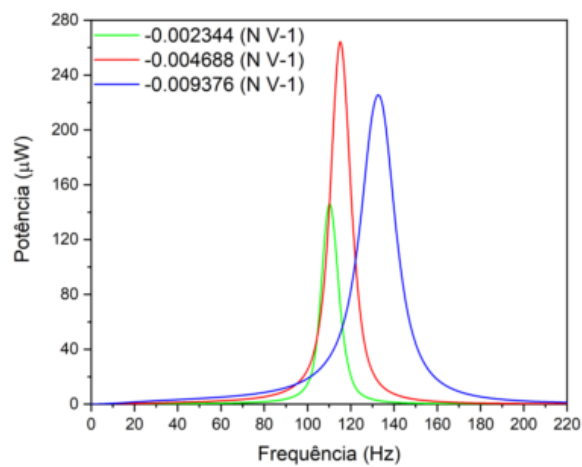
Pode-se observar (Figura 49) que a situação que apresentou o maior valor de tensão elétrica na frequência de ressonância foi, justamente, a curva em que o valor de acoplamento é igual ao sugerido por Kim et al. (2010). Esse fenômeno se repete para os casos com adição de

massa de prova. Em todos eles a curva que apresenta os maiores resultados de tensão e potência, na frequência de ressonância, são as calculadas com os valores de acoplamento propostas por Kim et al. (2010). Então, nestes casos não é possível promover uma ligação entre o acoplamento, valor maior ou menor, e a produção de mais ou menos energia.



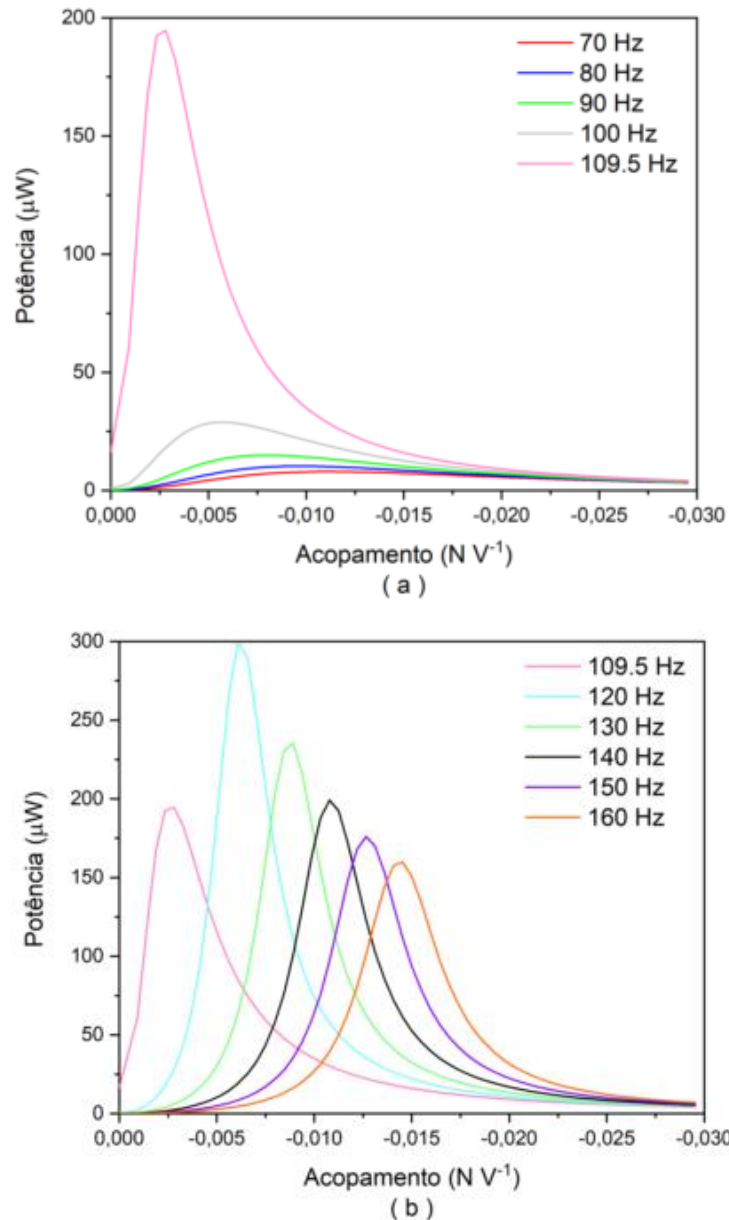
**Figura 49:** Tensão Elétrica x frequência para diferentes valores de acoplamento eletromecânico para o sistema sem massa de prova.

Quando se observa a potência gerada (Figura 50) o mesmo acontece, quanto menor o acoplamento maior a frequência de ressonância, porém não necessariamente o acoplamento se torna maior.



**Figura 50:** Potência x frequência para diferentes valores de acoplamento eletromecânico para o sistema sem massa de prova.

Com o objetivo de desenvolver uma análise mais detalhada da influência do valor do acoplamento eletromecânico na potência gerada, foi obtido o gráfico (Figura 51) com alguns valores de acoplamento para visualizar a existência ou não de uma tendência.



**Figura 51:** Potência x acoplamento para o sistema sem massa de prova. (a) frequências antes da ressonância (109.5 Hz); (b) frequências após a ressonância.

Os resultados mostram que a potência apresenta pontos de máximo que dependem tanto da frequência como do valor do acoplamento. Observa-se uma forte dependência da potência em relação a estes parâmetros, uma vez que pequenas variações podem resultar em grandes alterações na potência gerada. Esse tipo de estudo pode ajudar na escolha do acoplamento ótimo em função da frequência na qual se pretende trabalhar.

## Capítulo 6

### 6. Conclusões

A área de Colheita de Energia (Energy Harvesting), principalmente aquela associada ao uso de materiais piezelétricos em sistemas com vibrações mecânicas ainda tem muito a ser explorada. Dessa forma, é uma área bastante atrativa para muitos pesquisadores e estudantes interessados tanto no campo da energia, quanto no de materiais. O aproveitamento dessa energia de vibração, com potencial de ser consumida através de dispositivos eletrônicos, é uma oportunidade de contribuir para a geração de energias renováveis, já que sua utilização não é comumente explorada e difundida.

Este trabalho apresentou uma metodologia para avaliar a influência de diversas variáveis e parâmetros em um sistema de geração de energia composto por uma viga piezelétrica, nas respostas de deslocamento, tensão elétrica e potência gerada.

Os resultados mostram que os dispositivos piezelétricos, para um regime linear, podem ser calibrados a fim de se obter as melhores respostas elétricas, de acordo com o ambiente em que ele estará inserido. Ou seja, se somente estão disponíveis baixas frequências, por exemplo, observa-se que a adição de uma massa de prova proporciona uma mudança na frequência de ressonância do sistema capaz de aumentar a quantidade de energia gerada.

Também foi desenvolvida uma análise para avaliar a influência de fatores do circuito elétrico. A análise mostrou que existe uma forte dependência, não só da frequência de excitação, como também do acoplamento eletromecânico. Neste caso, a metodologia proposta torna-se uma ferramenta interessante quando não é possível a adição de uma massa de prova, ou ainda, se deseja melhorar ainda mais a captação de energia do sistema.

Fator semelhante ocorre para a resistência. Os resultados mostram que a uma mesma frequência de excitação, uma mudança na resistência pode ajudar ou prejudicar a geração de energia. Neste caso, deve-se observar com cuidado a relação entre resistência, tensão elétrica e a potência gerada, pois o aumento do valor em um não necessariamente significa o aumento de valor em outro.

Através do presente trabalho é possível concluir que apesar das limitações inerentes ao sistema linear as variáveis e parâmetros influenciam a resposta do sistema de uma forma com certo grau de complexidade. Em função das não-linearidades presentes no sistema real, torna-se necessária o aprimoramento do modelo proposto.

No que tange ao campo científico e acadêmico, o trabalho é de extrema relevância tanto para a produção de conhecimento, possibilitando novos desdobramentos, pesquisas e discussões na formação de estudantes e pesquisadores no campo, quanto para o fortalecimento dessa área da engenharia. Os estudos nessa área trazem como benefício para o meio ambiente a substituição dos tipos de energias advindos de recursos naturais, sendo uma fonte limpa e sustentável, que, portanto, não gera resíduos ou agentes poluentes. Ao olhar da sociedade, este tipo de tecnologia gera uma conscientização para as gerações futuras quanto ao uso da energia, pois é necessário buscar meios alternativos para suprir a demanda de consumo.

Por fim, para trabalhos futuros, é sugerida a padronização do modelo para que este possa ser utilizado quando se deseja verificar os melhores parâmetros segundo as condições de trabalho. Ou seja, desenvolver uma interface mais interativa para que, uma pessoa que tenha interesse em estudar a geração de energia com piezelétricos, possa rapidamente identificar quais os valores de acoplamento, resistência e massa irão ajudar para que o sistema responda com a maior potência possível. Outra motivação para futuros trabalhos é introduzir um elemento para incorporar efeitos de não-linearidades no modelo.

## Capítulo 7

### 7. Referências Bibliográficas

ADACHI, K.; TANAKA, T. “An experimental power generation evaluation of cantilever type of piezoelectric vibration energy harvester”. ASME 2009 conference on smart materials, adaptive structures and intelligent systems SMASIS2009, Oxnard. Oxnard: ASME, p. 281-289, 2009.

AJITSARIA, J.; CHOE, S. Y.; SHEN, D.; KIM, D. J. “Modeling and analysis of a bimorph piezoelectric cantilever beam for voltage generation”. *Smart Materials and Structure*, v.16, n.2, p. 447–454, 2007.

ANTON, S. R.; SODANO, H. A. “A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006)”. *Smart Materials and Structure*, v.16, n.3, p. R1–R21, 2007.

BEEBY, S. P.; TORAH, R. N.; TUDOR, M. J.; GLYNNE-JONES, P.; O’DONNELL, T.; SAHA, C. R.; ROY, S. “A Micro Electromagnetic Generator for Vibration Energy Harvesting”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, v.17, pp: 1257–1265, 2007.

BORGES G. X.; COSTA L. G. Estudo dos Efeitos Não-Lineares na Geração de Energia Limpa através de Materiais Piezelétricos, Dissertação de Projeto Final de Curso CEFET/RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2017.

D’HULST, R.; STERKEN, T.; PUERS, R.; DECONINCK, G.; DRIESEN, J. “Power Processing Circuits for Piezoelectric Vibration-Based Energy Harvester”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 57, pp. 4170-4177, 2010.

DARMAYUDA I. M.; KEVIN, C.; MINKYU, J. “Modified Buck Boost Circuit for Linear and Non-Linear Piezoelectric Energy Harvesting”. *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Electronics and Communication Engineering*, v. 7, n. 9, 2013.

DARMAYUDA, I. M.; GAO, Y.; M. TAN, T., CHENG, S. J.; ZHENG, Y.; JE, M.; HENG, C.H. “A Self-Powered Power Conditioning IC for Piezoelectric Energy Harvesting From Short-Duration Vibrations”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 59, pp. 578-582, 2012.

DE PAULA, A. S.; INMAN, D.J.; SAVI, M. A. “Energy Harvesting in a Nonlinear Piezomagnetoelastic Beam Subjected to Random Excitation”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 54-55, pp. 405-416, 2014.

DROESCHER, R. E. Obtenção e caracterização microestrutural e elétrica de cerâmicas PZT-PMN. Programa de Pós Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e Materiais. UFRS, Porto Alegre, 2009.

DU TOIT, N. E.; WARDLE, B. L. Performance of Microfabricated Piezoelectric Vibration Energy Harvesters. *Integrated Ferroelectrics*, v.83, 2006.

DU TOIT, N. E. Modeling and design of a MEMS piezoelectric vibration energy harvester, Master's Thesis Massachusetts Institute of Technology, 2005.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. "An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations". *Smart Materials and Structure*, v. 18, n. 2, p. 1–18, 2009.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. "Introduction to Piezoelectric Energy Harvesting", Wiley on line Library, 2011.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. "Broadband Piezoelectric Power Generation on High-Energy Orbits of the Bistable Duffing Oscillator with electromechanical coupling". *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, pp. 2339-2353, 2010.

FERRARI, M.; FERRARI, V.; GUIZZETTI, M.; ANDÒ, B.; BAGLIO S.; TRIGONA, C. "Improved Energy Harvesting from Wideband Vibrations by Nonlinear Piezoelectric Converters", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 162, 2010.

FERREIRA, D.; CHAVARETTE, F.; ALMEIDA, L.; SOUZA, R.; LIMA, L. "Multimodal Energy Harvesting Efficiency Enhancement via Linear Matrix Inequalities Control Driven". *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, v. 4, n. 1, 2016.

GIARETA, M. Vibrações Forçadas com força Axial num Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas. Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Matemática Aplicada. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2011.

GOLDEMBERG, J.; LUCON, O. "Energia e meio ambiente no Brasil". *SciELO Brasil. Estudos Avançados*, 2007.

GOLDFARB, M.; JONES, L.D. "On the Efficiency of Electric Power Generation with Piezoelectric Ceramic", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 121, pp. 566-571, 1999.

HIBBELER R. C.; Resistência dos Materiais, 7ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

HOWELLS, C. A. "Piezoelectric energy for soldier system", Technical report, US Army CERDEC C2D - Army Power Division, 2008.

INMAN, D.J.; CUDNEY, H.H. "Structural and Machine Design Using Piezoceramic Materials: a Guide for Structural Design Engineers", Final Report NASA Langley Grant. NAG-1-1998, 2000.

KALYANARAMAN, K.; BABU, J. "Power harvesting system in mobile phones and laptop using piezoelectric charge generation", World Congress of Engineering and Computer Science, 2010.

KAŠPÁREK, M.; OWCZAREK, P.; BACHMAN, P. "The Controllability and Behavior Analysis of Piezoelectric Bending Actuator Assembly". IAPGÓS, n.3, pp.73-74, 2014.

KAZMIERSKI, T. J.; BEEBY, S. "Energy Harvesting Systems: Principles Modeling and Applications". New York: Springer, 2011.

KIM, M.; HOEGEN, M.; DUGUNDJI, J.; WARDLE, B. L.; "Modeling and experimental verification of proof mass effects on vibration energy harvester", Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA, 2010.

KIM, S.H.; AHN, J.H.; CHUNG, H.; KANG, H. "Analysis of piezoelectric effects on various loading conditions for energy harvesting in a bridge system", Sensors and Actuators A: Physical, 2011.

KIM, S.H.; PRIYA S.; STEPHANOU, H.; UCHINO, K. "Consideration of Impedance Matching Techniques for Efficient Piezoelectric Energy Harvesting", IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 54, pp. 1851-1859, 2007.

KYMISSIS, J.; KENDALL, C.; PARADISO, J.; GERSHENFELD, N. "Parasitic Power Harvesting in Shoes", Second IEEE International Symposium on wearable Computers, October 19-20th, Pittsburg, PA, pp. 132-139, 1998.

LAGOUDAS, D.; Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications, ed. Springer, 2008.

LEE, J. B.; CHEN, Z.; ALLEN, M. G.; ROHATGI, A.; ARYA, R. "A high voltage solar cell array as an electrostatic MEMS power supply". Micro electro mechanical systems, IEEE Workshop, Osio, [S.l.: s.n.], p. 331-336, 1994.



LEFEUVRE, E.; AUDIGIER, D.; RICHARD, C.; GUYOMAR, D. “Buck-Boost Converter for Sensorless Power Optimization of Piezoelectric Energy Harvester”, *IEEE Transactions on Electronics*, v. 22, pp. 2018-2025, 2007.

LEO, D.J. “Engineering Analysis of Smart Material Systems”, John Wiley & Sons, 2007.

LI, Q.; NAING, V.; DONELAN, J.M. “Development of a Biomechanical Energy Harvester”, *Journal of Neuro-Engineering and Rehabilitation*, v. 6, n: 22, 2009.

LIANG, C.; SUN, F.; ROGERS, C. A. “Electro-mechanical impedance modeling of active material systems”. *Smart Materials and Structures*, v. 5, p. 171-186, 1996.

LIAO, Y.; SODANO, H. A. “Model of a single mode energy harvester and properties for optimal power generation”. *Smart Materials and Structure*, v. 17, n. 6, p. 1-14, 2008.

LIU, C.; WU, H.; FENG, L.; YANG, A. Parallel Fourth-Order Runge-Kutta Method to Solve Differential Equations. In: B. Liu and C. Chai (Eds.): *ICICA 2011, LNCS 7030*, pp. 192–199, 2011.

LUMENTUT, M. F.; HOWARD, I. M. “An analytical method for vibration modeling of a piezoelectric bimorph beam for power harvesting”. *ASME 2009 conference on smart materials, adaptive structures and intelligent systems SMASIS, Oxnard. Active Materials, Mechanics and Behavior; Modeling, Simulation and Control*. Oxnard: ASME, p. 601-611, 2009.

MAURINI, C.; PORFIRI, M.; POUGET, J. “Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 298, pp.918–933, 2006.

OTTMANN, G. K.; HOFMANN, H. F.; LESIEUTRE, G. A. “Optimized Piezoelectric Energy Harvesting Circuit Using Step-Down Converter in Discontinuous Conduction Mode”, *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 18, pp. 696-703, 2003.

POZZI, M.; AUNG, M. S. H.; ZHU, M.; JONES, R. K.; GOULERMAS, J. Y. “The pizzicato knee-joint energy harvester: characterization with biomechanical data and the effect of backpack load”, *Smart Materials and Structure*, 21: 075023, 2012.

RAMADASS, Y.K.; CHANDRAKASAN, A.P. An efficient piezoelectric energy harvesting Interface circuit using a bias-flip rectifier and shared inductor. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Piscataway, v. 45, n. 1, 2010.

RANGEL, R.F.; SOUTO, C.R.; DA SILVA, S.A.; FILHO, R.P.M. “Caracterização de uma célula tubular piezoelétrica para geração de energia elétrica”. In Proceedings of the VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM2014. Uberlândia, Brasil, 2014.

REID, A.; JUDD, M. “A Novel self-powered condition monitoring sensor for harsh environments – feasibility study”. International symposium on high voltage engineering, Ljubljana. Diagnostics and on-line monitoring for CBM. [S.l.: s.n.], v.15, 2007.

ROUNDY, S.; STEINGART, D.; FRECHETTE, L.; WRIGHT, P.; RABAEY, J. “Power Sources for Wireless Sensor Networks”. Lecture Notes in Computer Science 2920, pp 1–17, 2004a.

ROUNDY, S.; WRIGHT, P. K.; RABAEY, J. M. “Energy Scavenging for Wireless Sensor Networks with Special Focus on Vibrations”. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004b.

ROWE, D.M. CRC handbook of thermoelectrics: micro to nano. London: CRC Press, p. 7-30, 2005.

SEBALD G.; LEFEUVRE E.; GUYOMAR D. “Pyroelectric energy conversion: Optimization principles”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 55, 2008.

SHAW III, G.; PROROK, B.C.; STARMAN, L.; FURLONG, C., MEMS and Nanotechnology, V. 5, New York: Springer, 2011.

SHU, Y.C. Performance Evaluation of Vibration-Based Piezoelectric Energy Scavengers. In: S. Priya, D.J. Inman (eds.), Energy Harvesting Technologies, DOI 10.1007/978-0-387-76464-1 3 C Springer Science+Business Media, LLC 2009.

SILVA, L. M.; SAVI, M. A.; MONTEIRO, P. C.; NETTO, T. A. Effect of the piezoelectric hysteretic behavior on the vibration-based energy harvesting, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 24, pp. 1278-1285, 2013.

SODANO, H.A.; INMAN, D.J.; PARK, G. “Comparison of piezoelectric energy harvesting devices for recharging batteries”. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 16, n. 10, p. 799-807, 2005.

SODANO, H.A.; MAGLIULA, E.A.; PARK, G.; and INMAN, D.J. “Electric Power Generation from Piezoelectric Materials”, The 13th International Conference on Adaptive Structures and Technologies, October 7-9th, Potsdam/Berlin, Germany, 2002.

SWALLOW, L.M.; LUO, J.K.; SIORES E.; PATEL, I.; DODDS, D. "A piezoelectric fibre composite based energy harvesting device for potential wearable applications". *Smart Materials and Structure*, v.17, n.2, p.1-7, 2008.

TAN, D.; CHEN, Z. On A General Formula of Fourth Order Runge-Kutta Method. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, Vol. 7 No. 2, 2012.

TORAH, R.N.; TUDOR, M.J.; PATEL, K.; GARCIA, I.N.; BEEBY, S.P. "Autonomous low power microsystem powered by vibration energy harvesting". *IEEE 2007 conference Sensors*, Atlanta: [s.n.], p. 264-267, 2007.

TRIPLETT A.; QUINN D. D. "The effect of non-linear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 20, pp.1959-1967, 2009.

UMEDA, M.; NAKAMURA, K.; UEHA, S. "Analysis of Transformation of Mechanical Impact Energy to Electrical Energy Using a Piezoelectric Vibrator", *Japanese Journal of Applied Physics*, v. 35, Part1, n.5B, pp. 3267-3273, 1996.

UMEDA, M.; NAKAMURA, K.; UEHA, S. "Energy Storage Characteristics of a Piezo-Generator using Impact Induced Vibration", *Japanese Journal of Applied Physics*, v. 36, Part1, n.5B, 1997.

WILLIAMS, C. B.; YATES, R. B. "Analysis of a micro-electric generator for microsystems", *Sensors and Actuators A*, v.52, pp. 8-11, 1996.

## APÊNDICE A: Discretização das equações analíticas de movimento

A partir das equações governantes A.1 e A.2 serão obtidas as equações utilizadas para o modelo analítico.

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz - \theta v = -B_f\ddot{w}_B \quad (\text{A.1})$$

$$\theta\dot{z} + C_p\dot{v} + \frac{1}{R_l}v = 0 \quad (\text{A.2})$$

Dividindo ambos os lados da equação A.1 pela massa  $M$  e levando consideração que a frequência natural do sistema  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$  e a taxa de amortecimento  $\zeta_m = \frac{C}{2M\omega_n}$ , a equação (A.1) fica:

$$\ddot{z} + 2\zeta_m\omega_n\dot{z} + \omega_n^2z - \frac{\theta v}{M} = \frac{-B_f\ddot{w}_B}{M} \quad (\text{A.3})$$

Utilizando o método da transformada de Laplace para resolver a equação A.3:

$$L\left\{\ddot{z} + 2\zeta_m\omega_n\dot{z} + \omega_n^2z - \frac{\theta v}{M}\right\} = L\left\{\frac{-B_f\ddot{w}_B}{M}\right\}$$

$$L\{\ddot{z}\} + L\{2\zeta_m\omega_n\dot{z}\} + L\{\omega_n^2z\} - L\left\{\frac{\theta v}{M}\right\} = L\left\{\frac{-B_f\ddot{w}_B}{M}\right\} \quad (\text{A.4})$$

Para cada termo da equação, sabemos que:

$$L\{z\} = Z(s) \quad (\text{A.5})$$

$$L\{\dot{z}\} = sZ(s) - Z(0) \quad (\text{A.6})$$

$$L\{\ddot{z}\} = s^2Z(s) - \dot{z}(0) - sZ(0) \quad (\text{A.7})$$

$$L\{v\} = V(s) \quad (\text{A.8})$$

$$L\{\dot{v}\} = sV(s) - V(0) \quad (\text{A.9})$$

$$L\{\ddot{w}_B\} = s^2W_B(s) - \dot{w}_B(0) - sW_B(0) \quad (\text{A.10})$$

Considerando as condições iniciais nulas, portanto  $Z(0) = \dot{z}(0) = V(0) = W_B(0) = \dot{w}_B(0) = 0$ , podemos reescrever a equação (A.4) substituindo pelas equações (A.5) a (A.10) e obter:

$$s^2 Z(s) + 2\zeta_m \omega_n s Z(s) + \omega_n^2 Z(s) - \frac{\theta}{M} V(s) = -\frac{-B_f s^2 W_B(s)}{M} \quad (\text{A.11})$$

Sendo  $s = i\omega$ , portanto:

$$\begin{aligned} -\omega^2 Z(\omega) + 2\zeta_m \omega_n \omega Z(\omega)i + \omega_n^2 Z(\omega) - \frac{\theta}{M} V(\omega) &= \frac{B_f \omega^2 W_B(\omega)}{M} \\ (-\omega^2 + 2\zeta_m \omega_n \omega i + \omega_n^2) Z(\omega) - \frac{\theta}{M} V(\omega) &= \frac{B_f \omega^2}{M} W_B(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Agora desenvolvendo a segunda equação governante de movimento A.2, utiliza-se o mesmo processo, com a transformada de laplace para resolver a equação. Assim passando da base do tempo para a base da frequência.

$$L\{\theta \dot{z}\} + L\{C_p \dot{v}\} + L\left\{\frac{1}{R_l} v\right\} = L\{0\} \quad (\text{A.13})$$

Para cada termo da equação, sabemos que:

$$L\{\dot{z}\} = sZ(s) - Z(0) \quad (\text{A.14})$$

$$L\{v\} = V(s) \quad (\text{A.15})$$

$$L\{\dot{v}\} = sV(s) - V(0) \quad (\text{A.16})$$

$$L\{0\} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Considerando as condições iniciais nulas, portanto  $Z(0) = V(0) = 0$ , podemos reescrever a equação A.13 substituindo pelas equações A.14 a A.17 e obter:

$$\theta s Z(\omega) + C_p s V(\omega) + \frac{1}{R_l} V(\omega) = 0 \quad (\text{A.18})$$

Sendo  $s = i\omega$ , portanto:

$$\theta \omega Z(\omega)i + C_p \omega V(\omega)i + \frac{1}{R_l} V(\omega) = 0$$

$$\theta \omega i Z(\omega) + \left(C_p \omega i + \frac{1}{R_l}\right) V(\omega) = 0 \quad (\text{A.19})$$

Colocando as equações A.12 e A.19 na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + 2\zeta_m \omega_n \omega i + \omega_n^2 & -\frac{\theta}{M} \\ \theta \omega i & C_p \omega i + \frac{1}{R_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(\omega) \\ V(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_f \omega^2 W_B(\omega) \\ M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

A matrix A é definida sendo:

$$A = \begin{bmatrix} -\omega^2 + 2\zeta_m \omega_n \omega i + \omega_n^2 & -\frac{\theta}{M} \\ \theta \omega i & C_p \omega i + \frac{1}{R_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Calculando a determinante de A, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \text{Det } A &= \left[ \left( -\omega^2 + 2\zeta_m \omega_n \omega i + \omega_n^2 \right) \left( C_p \omega i + \frac{1}{R_l} \right) + \left( \frac{\theta}{M} \right) (\theta \omega i) \right] \\ \text{Det } A &= \left( \frac{\omega_n^2}{R_l} - \frac{\omega^2}{R_l} - 2\zeta_m C_p \omega_n \omega^2 \right) + \left( \frac{\theta \omega}{M} + \frac{2\zeta_m \omega_n \omega}{R_l} + C_p \omega_n^2 \omega - \omega^3 C_p \right) i \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Agora, voltando a equação (y), multiplicam-se os dois lados da equação pela inversa da matriz A:

$$A^{-1} A \begin{bmatrix} Z(\omega) \\ V(\omega) \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} B_f \omega^2 W_B(\omega) \\ M \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular a matriz inversa, necessita calcular:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\text{Det } A} \text{adj}(A) \\ \text{adj}(A) &= \begin{bmatrix} C_p \omega i + \frac{1}{R_l} & \frac{\theta}{M} \\ -\theta \omega i & -\omega^2 + 2\zeta_m \omega_n \omega i + \omega_n^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} Z(\omega) \\ V(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_p \omega i + \frac{1}{R_l}}{\text{Det } A} & \frac{\frac{\theta}{M}}{\text{Det } A} \\ -\frac{\theta \omega i}{\text{Det } A} & \frac{-\omega^2 + 2\zeta_m \omega_n \omega i + \omega_n^2}{\text{Det } A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_f \omega^2 W_B(\omega) \\ M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$Z(\omega) = \left( \frac{C_p \omega i + \frac{1}{R_l}}{\text{Det } A} \right) \left( \frac{B_f \omega^2 W_B(\omega)}{M} \right) \quad (\text{A.25})$$

$$V(\omega) = \left(-\frac{\theta\omega i}{\text{Det } A}\right) \left(\frac{B_f\omega^2 W_B(\omega)}{M}\right) \quad (\text{A.26})$$

Para  $Z(\omega)$ :

$$\frac{Z(\omega)}{B_f\omega^2 W_B(\omega)} = \left(\frac{1+R_l C_p \omega i}{R_l M (\text{Det } A)}\right) \quad (\text{A.27})$$

Como as unidades de  $\omega^2$  correspondem a  $\left[\frac{1}{s^2}\right]$  e  $W_B(\omega)$  correspondem a [m], portanto  $\omega^2 W_B(\omega) = [\text{aceleração}]$ .  $\omega^2 W_B(\omega)$  vai ser definido como  $\ddot{W}_B$ .

$$\frac{Z(\omega)}{B_f \ddot{W}_B} = \left(\frac{1+R_l C_p \omega i}{R_l M (\text{Det } A)}\right)$$

$$\frac{Z(\omega)}{B_f \ddot{W}_B} = \left(\frac{1+R_l C_p \omega i}{R_l M \left[\left(\frac{\omega_n^2}{R_l} - \frac{\omega^2}{R_l} - 2\zeta_m C_p \omega_n \omega^2\right) + \left(\frac{\theta\omega}{M} + \frac{2\zeta_m \omega_n \omega}{R_l} + C_p \omega_n^2 \omega - \omega^3 C_p\right) i\right]}\right) \quad (\text{A.28})$$

Agora, para adimensionalizar a equação A.28, o numerador  $1 + R_l C_p \omega i$  e o numerador  $R_l M \left[\left(\frac{\omega_n^2}{R_l} - \frac{\omega^2}{R_l} - 2\zeta_m C_p \omega_n \omega^2\right) + \left(\frac{\theta\omega}{M} + \frac{2\zeta_m \omega_n \omega}{R_l} + C_p \omega_n^2 \omega - \omega^3 C_p\right) i\right]$  deverão ser multiplicados por  $\frac{R_l}{\omega_n^2}$  e as seguintes relações satisfeitas:  $\alpha = R\omega_n C_p$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$  e  $\kappa^2 = \frac{\theta^2}{\kappa C_p}$ .

Também para que as relações sejam satisfeitas, alguns termos deverão ser multiplicados por  $\left(\frac{\omega_n}{\omega_n}\right)$  e como  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$ , então:

$$\frac{(1+R_l C_p \omega i) \left(\frac{\omega_n}{\omega_n}\right)}{R_l M \left[\left(\frac{\omega_n^2}{R_l} - \frac{\omega^2}{R_l} - 2\zeta_m C_p \omega_n \omega^2\right) \left(\frac{\omega_n}{\omega_n}\right) + \left(\frac{\theta\omega}{M} \left(\frac{\omega_n}{\omega_n}\right) + \frac{2\zeta_m \omega_n \omega}{R_l} + C_p \omega_n^2 \omega \left(\frac{\omega_n}{\omega_n}\right) - \omega^3 C_p \left(\frac{\omega_n}{\omega_n}\right)\right) i\right] \left(\frac{R_l}{\omega_n^2}\right) \left(\frac{\omega_n^2}{R_l}\right)} \quad (\text{A.29})$$

portanto,

$$\frac{Z(\omega)}{B_f \ddot{W}_B} = \frac{1}{K} \frac{(1+\alpha\Omega i)}{[(1-\Omega^2) - 2\zeta_m \alpha \Omega^2] + [(\{1+\kappa^2\} - \Omega^2) \alpha \Omega + 2\zeta_m \Omega] i} \quad (\text{A.30})$$

Sabendo que para calcular o módulo de uma equação com parte imaginária na forma:

$$a = b + ci \quad (\text{A.31})$$

necessita multiplicar por  $b - ci$  e tirar a raiz:

$$|a| = \sqrt{(b + ci)(b - ci)} \quad (\text{A.32})$$

$$|a| = \sqrt{b^2 + c^2} \quad (\text{A.33})$$

O resultado em módulo da equação fica:

$$\left| \frac{Z(\omega)}{B_f \ddot{W}_B} \right| = \frac{1}{K} \frac{\sqrt{1 + (\alpha\Omega)^2}}{\sqrt{[(1 - \Omega^2) - 2\zeta_m \alpha \Omega^2]^2 + [(\{1 + \kappa^2\} - \Omega^2) \alpha \Omega + 2\zeta_m \Omega]^2}} \quad (\text{A.34})$$

Agora para  $V(\omega)$ :

$$\frac{V(\omega)}{B_f \omega^2 W_B(\omega)} = \left( \frac{-\theta \omega i}{M(\text{Det } A)} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{V(\omega)}{B_f \ddot{W}_B} = \left( \frac{-\theta \omega i}{M \left[ \left( \frac{\omega_n^2}{R_l} - \frac{\omega^2}{R_l} - 2\zeta_m C_p \omega_n \omega^2 \right) + \left( \frac{\theta \omega}{M} + \frac{2\zeta_m \omega_n \omega}{R_l} + C_p \omega_n^2 \omega - \omega^3 C_p \right) i \right]} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{V(\omega)}{B_f \ddot{W}_B} = \left( \frac{-\theta \omega i \left( \frac{\theta}{\theta} \right) \left( \frac{\omega_1}{\omega_1} \right) \left( \frac{C_p}{C_p} \right)}{M \left[ \left( \frac{\omega_n^2}{R_l} - \frac{\omega^2}{R_l} - 2\zeta_m C_p \omega_n \omega^2 \right) \left( \frac{\omega_n}{\omega_n} \right) + \left( \frac{\theta \omega}{M} + \frac{2\zeta_m \omega_n \omega}{R_l} + C_p \omega_n^2 \omega - \omega^3 C_p \right) \left( \frac{\omega_n}{\omega_n} \right) \right] i \left( \frac{R_l}{\omega_n^2} \right) \left( \frac{\omega_n^2}{R_l} \right)} \right) \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{V(\omega)}{B_f \ddot{W}_B} = \left( \frac{1}{\theta} \frac{-\Omega \alpha \kappa^2 i}{[(1 - \Omega^2) - 2\zeta_m \alpha \Omega^2] + [(\{1 + \kappa^2\} - \Omega^2) \alpha \Omega + 2\zeta_m \Omega] i} \right) \quad (\text{A.38})$$

Tirando o módulo da equação:

$$\left| \frac{V(\omega)}{B_f \ddot{W}_B} \right| = \frac{1}{|\theta|} \frac{\Omega \alpha \kappa^2}{\sqrt{[(1 - \Omega^2) - 2\zeta_m \alpha \Omega^2]^2 + [(\{1 + \kappa^2\} - \Omega^2) \alpha \Omega + 2\zeta_m \Omega]^2}} \quad (\text{A.39})$$

Para se encontrar a equação que relacione a potência de saída do sistema, a seguinte relação deve ser satisfeita  $Pot_{out} = \frac{V^2}{R_l}$ .

$$\frac{V(\omega)^2}{R_l} = \left( \frac{\theta \omega i B_f \omega^2 W_B(\omega)}{M(\text{Det } A)} \right)^2 \frac{1}{R_l} \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{Pot_{out}}{[B_f \omega^2 W_B(\omega)]^2} = \left( -\frac{\theta \omega i}{M(\text{Det } A)} \right)^2 \frac{1}{R_l} \quad (\text{A.41})$$



$$\frac{\text{Pot}_{\text{out}}}{(\text{B}_f \ddot{\text{W}}_B)^2} = \frac{\theta^2 \omega^2}{M^2 (\text{Det } A)^2} \frac{1}{R_l} \left( \frac{C_p}{C_p} \right) \left( \frac{R_l}{\omega_n^2} \right)^2 \left( \frac{\omega_n^2}{R_l} \right)^2 \left( \frac{\omega_n}{\omega_n} \right)^2 \quad (\text{A.42})$$

Adimensionalizando e tirando o módulo da equação, fica:

$$\left| \frac{\text{Pot}_{\text{out}}}{(\text{B}_f \ddot{\text{W}}_B)^2} \right| = \frac{\omega_n}{K} \frac{\alpha \kappa^2 \Omega^2}{[(1-\Omega^2)-2\zeta_m \alpha \Omega^2]^2 + [(\{1+\kappa^2\}-\Omega^2)\alpha \Omega + 2\zeta_m \Omega]^2} \quad (\text{A.43})$$

Dessa forma, as três equações finais analíticas (A.34), (A.39) e (A.43) serão:

$$\left| \frac{Z(\omega)}{\text{B}_f \ddot{\text{W}}_B} \right| = \frac{1}{K} \frac{\sqrt{1+(\alpha \Omega)^2}}{\sqrt{[(1-\Omega^2)-2\zeta_m \alpha \Omega^2]^2 + [(\{1+\kappa^2\}-\Omega^2)\alpha \Omega + 2\zeta_m \Omega]^2}} \quad (\text{A.44})$$

$$\left| \frac{V(\omega)}{\text{B}_f \ddot{\text{W}}_B} \right| = \frac{1}{|\theta|} \frac{\alpha \kappa^2 \Omega}{\sqrt{[(1-\Omega^2)-2\zeta_m \alpha \Omega^2]^2 + [(\{1+\kappa^2\}-\Omega^2)\alpha \Omega + 2\zeta_m \Omega]^2}} \quad (\text{A.46})$$

$$\left| \frac{\text{Pot}_{\text{out}}}{(\text{B}_f \ddot{\text{W}}_B)^2} \right| = \frac{\omega_n}{K} \frac{\alpha \kappa^2 \Omega^2}{[(1-\Omega^2)-2\zeta_m \alpha \Omega^2]^2 + [(\{1+\kappa^2\}-\Omega^2)\alpha \Omega + 2\zeta_m \Omega]^2} \quad (\text{A.47})$$